Teste de Matemática A

2021 / 2022

Teste N.º 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Turistas de diversas nacionalidades encontravam-se de visita à cidade do Porto.

1.1. Os turistas foram inquiridos acerca da sua preferência quanto ao melhor jogador de futebol do mundo – Cristiano Ronaldo ou Leonel Messi.

Sabe-se que todos os turistas responderam ao inquérito e que todos manifestaram preferência por um e apenas um dos dois futebolistas.

Sabe-se ainda que:

- um em cada três turistas era de nacionalidade italiana;
- dos turistas italianos, $\frac{5}{7}$ consideraram Cristiano Ronaldo como o melhor jogador do mundo;
- a probabilidade de um turista ter referido que considerava Leonel Messi como sendo o melhor jogador do mundo, sabendo que era um turista não italiano, é $\frac{11}{70}$.

Escolheu-se, ao acaso, um turista desse grupo.

Determine a probabilidade de o turista escolhido ser italiano ou considerar Cristiano Ronaldo como o melhor jogador do mundo.

Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

1.2. Um autocarro turístico tem oito paragens previstas, em locais de interesse, para n turistas que se encontram no autocarro.

Supondo que cada turista escolhe, ao acaso, apenas uma das oito paragens para sair, qual é a probabilidade de todos os turistas escolherem sair no mesmo local de interesse?

(A) $\frac{1}{{}^{n}A'_{8}}$ **(B)** $\frac{1}{{}^{n}C_{8}}$ **(C)** 8^{-n} **(D)** 8^{1-n}

1.3. Numa loja de lembranças, um turista comprou dois tipos de lembranças da cidade: ímanes e *pins*. No saco da compra encontravam-se seis ímanes e alguns *pins*.

Considere que foram retirados do saco dois desses objetos de forma aleatória, não repondo o primeiro antes de se retirar o segundo.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: “o primeiro objeto retirado é um *pin*.”

B: “o segundo objeto retirado é um íman.”

Sabe−se que $P(B|A) = 0{,}5$.

Quantos *pins* se encontravam inicialmente no saco?

Elabore uma pequena composição, na qual justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita.

2. Seja n um número natural superior a dois.

Resolva a seguinte equação:

$$^{n}A_2 + \frac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{10}{9} + {}^{n}C_{n-1} \times {}^{n-1}C_1$$

3. Seja S, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

- $P(B) \neq 0$
- $P(A|B) = \frac{1}{3}$
- $P(A) = \frac{4}{3}P(B)$

Qual é o valor de $2P(B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$?

(A) 0 **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** 1

4. A soma dos três primeiros elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 352.

Qual é a diferença entre a soma de todos os elementos dessa linha e o elemento central dessa linha?

(A) $56\,708\,264$

(B) $67\,108\,864$

(C) $114\,159\,428$

(D) $123\,817\,128$

5. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$, com $x > 0$.

Sem efetuar o desenvolvimento do binómio, determine, se existir, o termo independente.

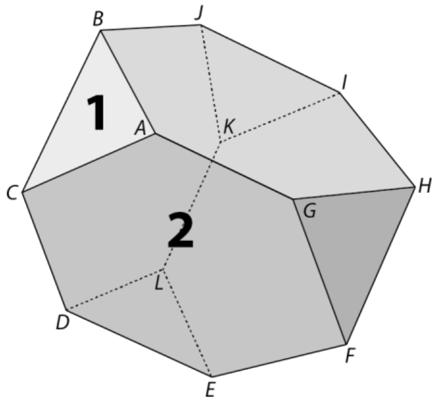
6. Seja S, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Prove que:

$$P(A \cup B) + P(\bar{A} \cup B) - P(\bar{A}) = P(A) + P(B)$$

7. Na figura seguinte está representado o tetraedro truncado $[ABCDEFGHIJKL]$, sólido constituído por oito faces, das quais quatro são hexágonos regulares e quatro são triângulos equiláteros. Duas das faces já estão numeradas com os números 1 e 2, como mostra a figura.



7.1. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices distintos do sólido.

Qual é a probabilidade de esses vértices formarem uma diagonal facial do sólido?

(A) $\frac{5}{11}$ **(B)** $\frac{6}{11}$ **(C)** $\frac{9}{11}$ **(D)** $\frac{10}{11}$

7.2. Considere que se pretende numerar as seis faces do sólido não numeradas, utilizando os algarismos de 3 a 8 e colocando um algarismo diferente em cada face.

De quantas maneiras o poderemos fazer, de forma que:

a) nas faces que são hexágonos fiquem só números primos?

b) nas faces que são triângulos sejam colocados no máximo dois números pares?

7.3. Considere agora que se dispõe de n cores diferentes $(n \geq 8)$ para colorir todas as faces do sólido.

Qual é a probabilidade de, ao colorir cada face do sólido com uma única cor, exatamente duas faces sejam pintadas da mesma cor e as restantes faces sejam pintadas com cores diferentes entre si?

(A) $\frac{{}^{8}C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6}{n^8}$ **(B)** $\frac{{}^{8}C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6}{{}^{n}A_8}$ **(C)** $\frac{{}^{8}C_2 \times 2 \times {}^{n-1}A_6}{{}^{n}A'_8}$ **(D)** $\frac{{}^{8}C_2 \times n \times {}^{n-1}C_6 \times 8!}{n^8}$

FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2. a)**	**7.2. b)**	**7.3.**	**Total**
25	10	20	25	10	10	20	20	10	20	20	10	**200**

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1.

1.1. Consideremos os acontecimentos:

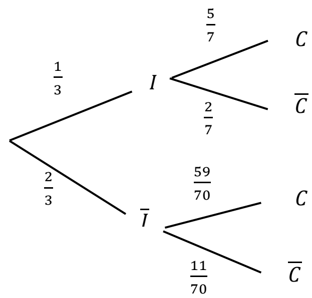
I: “o turista é de nacionalidade italiana.”

C: “o turista considera Cristiano Ronaldo o melhor jogador do mundo.”

Sabemos que:

- $P(I) = \frac{1}{3}$
- $P(C|I) = \frac{5}{7}$
- $P(\overline{C}|\overline{I}) = \frac{11}{70}$

Colocando estes dados num diagrama de árvore, obtém-se:



$P(I \cap C) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{21}$

$P(I \cap \overline{C}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$

$P(\overline{I} \cap C) = \frac{2}{3} \times \frac{59}{70} = \frac{59}{105}$

$P(\overline{I} \cap \overline{C}) = \frac{2}{3} \times \frac{11}{70} = \frac{11}{105}$

$P(C) = \frac{5}{21} + \frac{59}{105} = \frac{4}{5}$

Pretende-se determinar $P(I \cup C)$.

$$P(I \cup C) = P(I) + P(C) - P(I \cap C) = \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{5}{21} = \frac{94}{105}$$

1.2. Opção (D)

Número de casos possíveis: $\underbrace{\overset{T_1}{8} \times \overset{T_2}{8} \times \overset{T_3}{8} \times \overset{\ldots}{\ldots} \times \overset{T_n}{8}}_{n \text{ turistas}} = 8^n$

Número de casos favoráveis: 8 casos

A probabilidade pretendida é $\frac{8}{8^n} = 8^{1-n}$.

1.3. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ significa “a probabilidade de o segundo objeto retirado ser um íman, sabendo que o primeiro objeto retirado foi um *pin*”.

Como $P(B|A) = 0{,}5$, isto significa que no momento da segunda extração se encontravam no saco igual número de ímanes e de *pins*, ou seja, seis de cada tipo, já que na primeira extração se retirou um *pin* e lá permaneceram os seis ímanes. Pode concluir-se, então, que inicialmente se encontravam no saco sete *pins*.

2. Para $n > 2$:

$$^{n}A_2 + \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{10}{9} + {}^{n}C_{n-1} \times {}^{n-1}C_1 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n-1)!\,(n+1) \times n!}{n! \times n!} = \frac{10}{9} + {}^{n}C_1 \times (n-1)$$

$$\Leftrightarrow n \times (n-1) + \frac{(n-1)!\,(n+1)}{n!} = \frac{10}{9} + n \times (n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!\,(n+1)}{n \times (n-1)!} = \frac{10}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{10}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9n + 9 = 10n$$

$$\Leftrightarrow n = 9$$

$\text{C.S.} = \{9\}$

3. Opção (D)

$$2P(B) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 2P(B) + P\left(\overline{A \cup B}\right) = 2P(B) + 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 2P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$= P(B) + 1 - \frac{4}{3}P(B) + \frac{1}{3}P(B) =$$

$$= -\frac{1}{3}P(B) + 1 + \frac{1}{3}P(B) =$$

$$= 1$$

Cálculo auxiliar

$$P(A|B) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(B)$$

4. Opção (A)

$$^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 352 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 352$$

$$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n \times (n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 352$$

$$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n \times (n-1)}{2} = 352$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 704$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 702 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-702)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 26 \vee n = -27$$

Logo, $n = 26$.

A soma de todos os elementos desta linha é igual a $2^{26} = 67\,108\,864$.

O elemento central desta linha é $^{26}C_{13} = 10\,400\,600$.

Assim, a diferença entre a soma de todos os elementos dessa linha e o elemento central dessa linha é $67\,108\,864 - 10\,400\,600 = 56\,708\,264$.

5. O termo geral do desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é:

$$^{10}C_k \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{10-k} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = {}^{10}C_k \times 2^{k-10} \times x^{5-\frac{k}{2}} \times (-1)^k \times x^{-2k} =$$

$$= {}^{10}C_k \times 2^{k-10} \times (-1)^k \times x^{5-\frac{5}{2}k},\ k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

Como pretendemos determinar o termo independente:

$$5-\frac{5}{2}k = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}k = -5$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

Assim, o termo independente é:

$$^{10}C_2 \times 2^{2-10} \times (-1)^2 = 45 \times \frac{1}{256} \times 1 =$$

$$= \frac{45}{256}$$

6. $P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup B) - P(\overline{A}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) - P(\overline{A}) =$

$$= P(A) + P(B) + P(B) - P(A \cap B) - (P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(B) - P(A \cap B) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$= P(A) + P(B)$ c.q.d.

7.

7.1. Opção (B)

O número de casos possíveis é igual a $^{12}C_2$.

O número de casos favoráveis é igual ao número de diagonais dos 4 hexágonos:

$4 \times \left({}^6C_2 - 6\right)$

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{4\times\left({}^6C_2 - 6\right)}{^{12}C_2} = \frac{6}{11}$.

7.2.

a) A face hexagonal numerada está numerada com o número primo 2 e a face triangular numerada está numerada com o número 1. Assim, restam-nos os números primos 3, 5 e 7 para distribuir pelas três faces hexagonais restantes, o que pode ser feito de 3! maneiras distintas. Por cada uma destas maneiras existem 3! modos distintas de numerar as três faces triangulares, ainda não numeradas, com os números 4, 6 e 8.

Assim, 3! × 3! = 36 é o número pedido.

b) Existem três casos mutuamente exclusivos:

1.º caso: zero números pares nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

2.º caso: um número par nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{{}^3C_1 \times {}^3C_2 \times 3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

3.º caso: dois números pares nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{{}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

Logo, o número pedido é igual a:

$$3! \times 3! + {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3! \times 3! \times 2 = 684$$

7.3. Opção (A)

O número de casos possíveis é igual a n^8.

${}^8C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher as duas faces, de entre as oito faces que vão ficar com a mesma cor. Por cada uma destas maneiras existem n cores distintas para pintar as duas faces que vão ficar com a mesma cor.

Escolhidas essas duas faces e a cor, restam $n-1$ cores distintas para colorir as seis faces restantes, logo ${}^{n-1}A_6$ é o número de modos distintos de pintar as seis faces restantes com cores diferentes entre si.

Assim, o número de casos favoráveis é dado por ${}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6$.

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6}{n^8}$.