Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere, num plano munido de referencial ortonormado xOy, os pontos $A(1,-2)$ e $B(-2,3)$.

1.1. Determine:

a) as coordenadas do ponto C, sabendo que B é o ponto médio de $[AC]$;

b) a área do quadrado com diagonal $[AB]$.

1.2. Seja $P(\alpha,\beta)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$.

Relacione α e β, escrevendo β em função de α.

2. A que quadrante de um referencial o.n. xOy pertence um ponto P tal que:

- pertence à reta de equação $y+x=0$;
- a sua abcissa é um número da forma k^2, com $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$?

(A) 1.º quadrante **(B)** 2.º quadrante
(C) 3.º quadrante **(D)** 4.º quadrante

3. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, os pontos $A(3,-4)$ e $B(-5,0)$.

Qual das seguintes condições define o conjunto de pontos do plano mais próximos de A do que de B?

(A) $y<2x$ **(B)** $y\le 2x$
(C) $y<-x+1$ **(D)** $y\le -x+1$

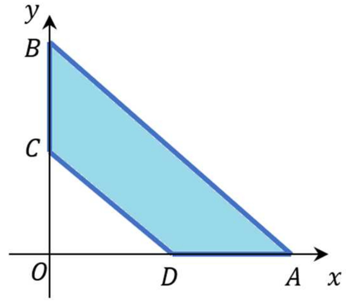
4. Num referencial o.n. do plano, xOy, qual das seguintes condições define a equação da circunferência cujo centro é o ponto de interseção da reta de equação $y=2x+1$ com a bissetriz dos quadrantes ímpares e que passa na origem do referencial?

(A) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ **(B)** $(x+1)^2+(y+1)^2=2$
(C) $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$ **(D)** $(x+1)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}$

5. Representou-se num referencial o.n. xOy o trapézio $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- $A(7,0)$
- $B(0,6)$
- $C(0,3)$
- D pertence ao eixo Ox .



5.1. Prove que $D\left(\frac{7}{2},0\right)$.

5.2. Calcule a área do trapézio.

5.3. Defina por uma condição o trapézio $[ABCD]$.

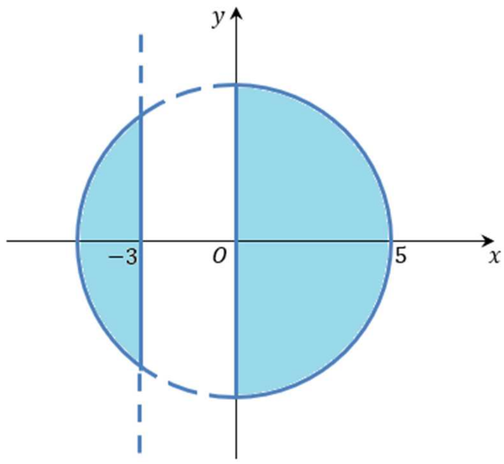
5.4. Em qual das seguintes opções estão as coordenadas de um ponto que não pertence ao trapézio $[ABCD]$?

(A) $(1,3)$ **(B)** $(4,1)$

(C) $(3,4)$ **(D)** $(5,1)$

6. Na figura, encontra-se representada uma região do plano, num referencial o. n. xOy, delimitada por uma circunferência centrada na origem e por duas retas verticais.

Qual das seguintes condições não representa o conjunto dos pontos representado?



(A) $x^2+y^2\leq 25\wedge(x\geq 0\vee x\leq -3)$

(B) $(x^2+y^2\leq 25\wedge x\geq 0)\vee(x^2+y^2\leq 25\wedge x\leq -3)$

(C) $x^2+y^2\leq 25\wedge\sim(-3<x<0)$

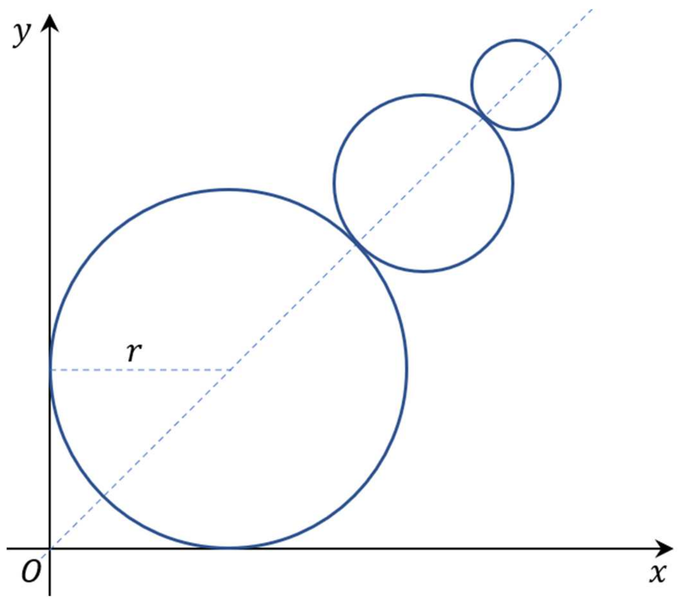
(D) $(x^2+y^2\leq 25\wedge\sim(x\leq 0))\vee(x^2+y^2\leq 25\wedge\sim(x\geq -3))$

7. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, a circunferência definida por $x^2+2x+y^2-8=0$.

Determine a área do triângulo $[ABO]$, sendo A e B os pontos da circunferência com maior abcissa e com maior ordenada, respetivamente.

8. Na figura, estão representadas três circunferências com centros pertencentes à bissetriz dos quadrantes ímpares, tangentes entre si e cujos raios são r, $\frac{r}{2}$ e $\frac{r}{4}$, com $r>0$.

Sabe-se ainda que a circunferência de raio r é tangente aos eixos coordenados.



8.1. Prove que a soma do perímetro das três circunferências é igual a $\frac{7\pi r}{2}$.

8.2. Seja $r=4$ e C o centro da circunferência representada de menor raio.

Determine $\overline{CO}$.

FIM

Cotações:

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.a)	**1.1.b)**	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**5.4.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**Total**
14	14	18	10	10	10	20	18	14	10	10	20	14	18	**200**

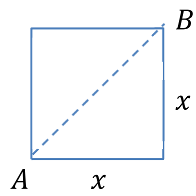
Proposta de resolução

1. **1.1.** **a)** Seja $C(x, y)$.

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right) = (-2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{2} = -2 \\ \frac{-2+y}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x = -4 \\ -2+y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 8 \end{cases}$$

Logo, $C(-5, 8)$.

b) $\overline{AB} = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$



Seja x o comprimento do lado do quadrado com diagonal $[AB]$.

$x^2 + x^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 34 \Leftrightarrow x^2 = 17$

Assim, a área do quadrado com diagonal $[AB]$ é 17 u.a..

1.2. Quer-se determinar a relação entre α e β tal que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Assim:

$$(\alpha-1)^2 + (\beta+2)^2 = (\alpha+2)^2 + (\beta-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 + 4\beta + 4 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 + \beta^2 - 6\beta + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\beta = 6\alpha + 8 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{5}\alpha + \frac{4}{5}$$

2. Como $y = -x$, $P(x, y)$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

Para além disso, como, para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k^2 > 0$, a abcissa de P é positiva, pelo que P pertence ao 4.º quadrante.

Resposta: (D)

3. Seja $P(x, y)$.

Quer-se determinar uma condição tal que $\overline{PA} < \overline{PB}$.

Assim:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 < (x+5)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 < x^2 + 10x + 25 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8y < 16x \Leftrightarrow y < 2x$$

Resposta: (A)

4. Seja $C(x, y)$ o centro da circunferência.

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x+1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

O raio da circunferência, r, é igual a $\overline{CO}$.

$\overline{CO} = \sqrt{(-1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$, logo, $r^2 = 2$.

Equação da circunferência: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$

Resposta: (B)

5.

5.1. D é o ponto de interseção da reta CD, que é paralela a AB, com o eixo Ox, por $[ABCD]$ ser um trapézio.

Equação da reta AB: $y = ax + b$

Como a ordenada de B é 6, $b = 6$.

Como $A(7,0)$ é um ponto da reta, $0 = 7a + 6 \Leftrightarrow a = -\frac{6}{7}$.

A equação da reta AB é $y = -\frac{6}{7}x + 6$.

Equação da reta CD: $y = -\frac{6}{7}x + 3$

Considerando $D(x, 0)$, tem-se que:

$$0 = -\frac{6}{7}x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{21}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

Logo, $D\left(\frac{7}{2}, 0\right)$.

5.2. A área do trapézio $[ABCD]$ é dada pela diferença da área dos triângulos $[ABO]$ e $[DCO]$.

$A_{[ABO]} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ e $A_{[DCO]} = \frac{\frac{7}{2} \times 3}{2} = \frac{21}{4}$, logo:

$A_{[ABCD]} = 21 - \frac{21}{4} = \frac{63}{4}$ u.a.

5.3. A partir das equações das retas AB e CD, tem-se que:

$$y \leq -\frac{6}{7}x + 6 \wedge y \geq -\frac{6}{7}x + 3 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$$

5.4. O ponto de coordenadas $(3,4)$ não pertence ao trapézio porque, para este ponto, é falso que $y \leq -\frac{6}{7}x+6$ uma vez que $-\frac{6}{7}\times 3+6=\frac{24}{7}<4=\frac{28}{7}$

Resposta: (C)

6. Como $\sim(x\leq 0)\Leftrightarrow x>0$ e $\sim(x\geq -3)\Leftrightarrow x<-3$, a condição que não define a região representada é $\left(x^2+y^2\leq 25\wedge \sim(x\leq 0)\right)\vee\left(x^2+y^2\leq 25\wedge \sim(x\geq -3)\right)$ por não incluir as fronteiras verticais da região.

Resposta: (D)

7. $x^2+2x+y^2-8=0\Leftrightarrow$

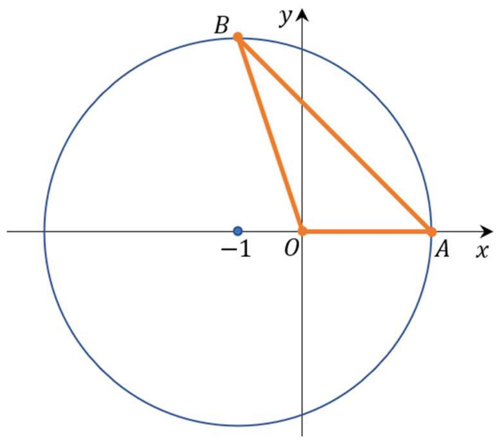
$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2-1-8=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=9$

A circunferência tem centro $C(-1,0)$ e raio $r=\sqrt{9}=3$.

Assim, $A(-1+3,0)$ e $B(-1,0+3)$, ou seja, $A(2,0)$ e $B(-1,3)$.

Portanto, $A_{[ABO]}=\frac{2\times 3}{2}=3$ u.a..



8.

8.1. $2\pi r+2\pi\frac{r}{2}+2\pi\frac{r}{4}=3\pi r+\frac{\pi r}{2}=\frac{7\pi r}{2}$

8.2. Seja C_1 o centro da circunferência representada de maior raio.

Tem-se que:

$\overline{C_1O}^2=4^2+4^2\Leftrightarrow \overline{C_1O}^2=2\times 4^2\Leftrightarrow \overline{C_1O}=4\sqrt{2}$,

porque $\overline{C_1O}>0$.

Assim, $\overline{CO}=4\sqrt{2}+4+2+2+1=9+4\sqrt{2}$.