REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

✱ **1.** Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão convergente?

(A) $(-1)^n \times n$ **(B)** $\dfrac{(-1)^n}{n}$ **(C)** $(-1)^n + n$ **(D)** $(-1)^n - n$

2. A soma dos cinco primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\dfrac{2}{3}$ é 211 .

Determine o quinto termo desta progressão.

✱ **3.** Seja Ω , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(\overline{B}) = 0{,}6$;
- $P(A \cup B) = 0{,}6$;
- $A \cap B = \varnothing$.

Qual é o valor de $P(\overline{A})$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}8$

✱ **4.** O Semáforo é um jogo matemático em que se usa um tabuleiro retangular de 3×4 casas e se dispõe de peças verdes, peças amarelas e peças encarnadas. As peças da mesma cor são iguais.

Na Figura 1, está representado um tabuleiro do jogo Semáforo cujas casas foram numeradas de 1 a 12 .

Pretende-se colocar 2 peças no tabuleiro, uma peça por casa, de modo a obter uma configuração colorida. Para o efeito, dispõe-se de várias peças de cada cor.

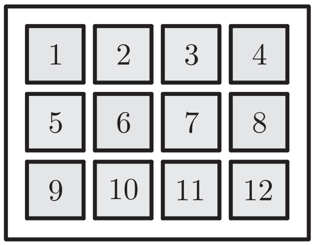

Figura 1

Considera-se uma configuração colorida o resultado da colocação de duas peças no tabuleiro. Duas configurações coloridas são diferentes se diferirem nas casas ocupadas pelas peças usadas ou na cor dessas peças.

A expressão seguinte permite determinar o número de configurações coloridas diferentes que é possível obter.

$$3 \times {}^{12}C_2 \ + \ {}^{3}C_2 \times {}^{12}A_2$$

Explique, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.

5. Dos alunos que participaram num torneio de jogos matemáticos, que incluiu os jogos Semáforo e Rastros, sabe-se que:

- metade dos alunos jogou Semáforo;
- um quarto dos alunos não jogou Rastros;
- um quinto dos alunos que não jogaram Rastros jogou Semáforo.

Determine a probabilidade de um aluno que participou no torneio, escolhido ao acaso, não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V e base de centro no ponto A.

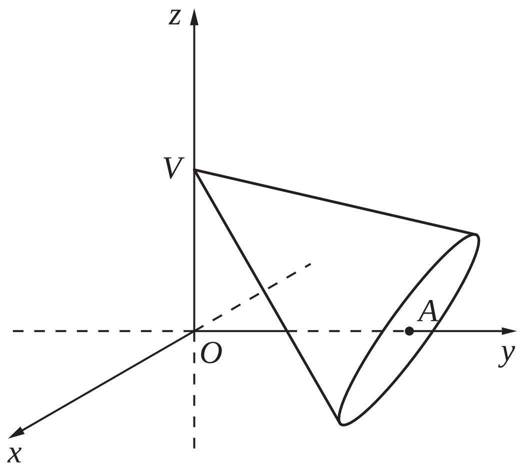

Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto V pertence ao eixo Oz, e o ponto A pertence ao eixo Oy;
- a base do cone tem raio 3 e está contida no plano definido por $4y - 3z = 16$.

* **6.1.** Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$?

(A) $4y - 3z = 11$ **(B)** $3x + 4y + z = 10$

(C) $3y + 4z = 8$ **(D)** $x + 3y + 4z = 3$

* **6.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do cone.

7. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de equação $(x+2)^2+(y-1)^2=9$.

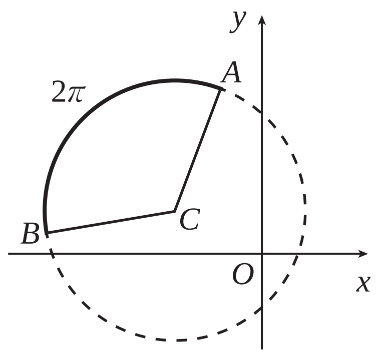

Figura 3

O ponto C é o centro da circunferência.

A e B são dois pontos da circunferência.

O arco de circunferência AB tem comprimento 2π .

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

8. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2-x}}{x+2} & \text{se} \quad x<-2 \vee x \geq 2 \\ \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4} & \text{se} \quad -2<x<2 \end{cases}$$

Resolva os itens **8.1.** e **8.2.** sem recorrer à calculadora.

* **8.1.** Averigue se a função f é contínua em $x=2$.

* **8.2.** Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]-\infty, -2[$, e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

9. Na Figura 4, está representado um cabo suspenso pelas suas extremidades em dois postes iguais, distanciados 10 metros entre si. Os postes estão instalados perpendicularmente ao solo, num terreno plano e horizontal. O ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes.

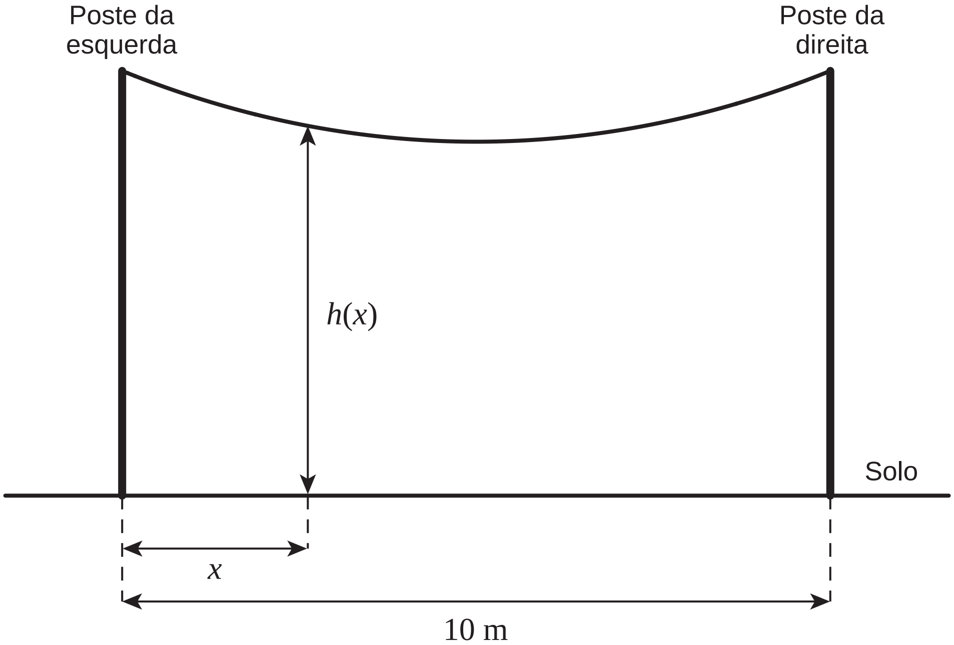

Figura 4

Seja h a função, de domínio $[0, 10]$, definida por $h(x) = 6{,}3\left(e^{\frac{x-5}{12{,}6}} + e^{\frac{5-x}{12{,}6}}\right) - 7{,}6$.

Admita que $h(x)$ é a altura, relativamente ao solo, em metros, de um ponto do cabo situado a x metros do poste da esquerda.

* **9.1.** Qual é a distância, arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo?

(A) $7{,}1$ m **(B)** $7{,}3$ m **(C)** $7{,}6$ m **(D)** $7{,}8$ m

* **9.2.** Para um ponto do cabo situado a d metros do poste da esquerda, verifica-se que, diminuindo 50% essa distância, a altura, relativamente ao solo, diminui 30 centímetros.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de d, sabendo-se que este valor existe e é único.

Apresente o resultado arredondado às décimas de metro.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

✱ 10. Na Figura 5, estão representados, no plano complexo, os afixos de cinco números complexos.

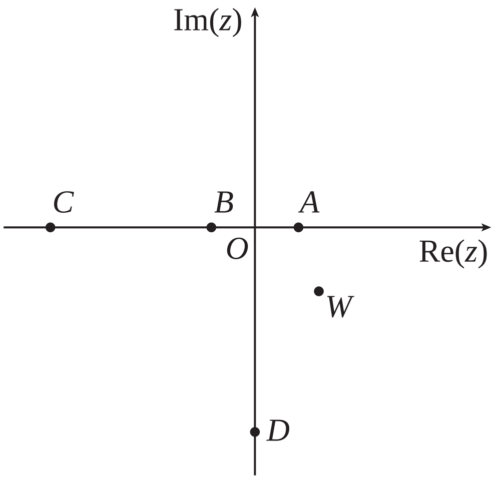

Figura 5

O ponto A pertence ao semieixo real positivo, os pontos B e C pertencem ao semieixo real negativo, e o ponto D pertence ao semieixo imaginário negativo.

O ponto W é o afixo de um número complexo w tal que $\operatorname{Im}(w) = -\operatorname{Re}(w)$ e $\operatorname{Re}(w) > 1$.

Qual dos pontos seguintes pode ser o afixo do número complexo $-iw^2$?

(A) Ponto A **(B)** Ponto B

(C) Ponto C **(D)** Ponto D

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a equação $z^3 = \left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^6$.

Determine o número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante.

Apresente o resultado na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

✱ 12. Na Figura 6, está representado o triângulo $[ABC]$.

Seja $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo BAC .

Sabe-se que:

- $C\hat{B}A = 2x$;
- $\overline{BC} = 2 \text{ cm}$.

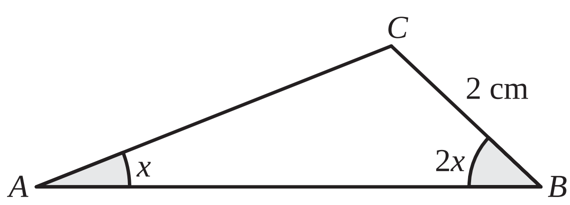

Figura 6

Mostre que o comprimento de $[AB]$, em centímetros, é dado, para cada valor de x , pela expressão

$$8\cos^2 x - 2$$

13. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $g(x) = 5x - 3\ln(x-1)$.

Estude a função g quanto à existência de assíntotas verticais e de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

14. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine os números reais que são solução da equação

$$(e^x - 1)\ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) = \ln(3 - x)$$

* **15.** Seja k um número real não nulo, e seja f a função definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \dfrac{k}{x}$.

Considere dois pontos do gráfico de f, A e B , sendo A o de menor abcissa. Considere, também, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB .

Mostre que, para qualquer valor de k , as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>10.</td><td>12.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">5.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">11.</td><td colspan="2">13.</td><td colspan="2">14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td colspan="12"></td><td>200</td></tr>
</table>