Teste de Matemática A

2022 / 2023

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

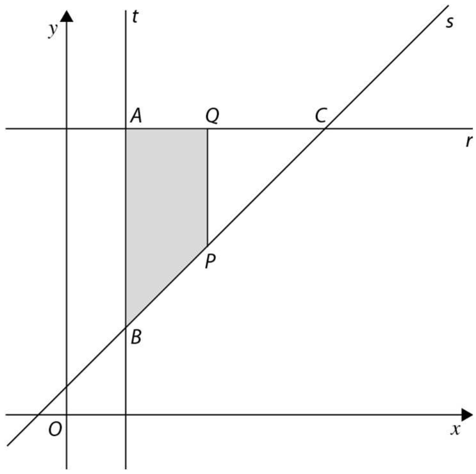
1. Considere o polinómio P definido por $P(x) = 5x^2 + x + 2023$ e um valor real não nulo a.

Sabe-se que o polinómio P tem o mesmo resto quando dividido por $x - a$ e por $x + 2a$.

Qual é o valor de a?

(A) $-\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $-\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{3}{5}$

2. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, as retas r, s e t.



Os pontos A e B são, respetivamente, os pontos de interseção das retas r e s com a reta t.

O ponto C é o ponto de interseção das retas r e s.

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $y = 10$;
- a reta s é definida pela equação $y = x + 1$;
- a reta t é definida pela equação $x = 2$.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$, nunca coincidindo com o ponto B nem com o ponto C, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, acompanhando o movimento do ponto P, de forma que a abcissa do ponto Q seja sempre igual à abcissa do ponto P.

Seja x a abcissa do ponto P.

2.1. Mostre que a área do trapézio $[ABPQ]$ pode ser dada, em função de x, com $x \in]2, 9[$, por:

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 9x - 16$$

2.2. Sem recorrer à calculadora, determine os valores de x para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 12. Apresente a sua resposta, usando a notação de intervalos de números reais.

2.3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 9x - 16$. A função f pode ser definida por uma expressão do tipo $f(x) = a(x - h)^2 + k$, onde a, h e k são números reais. Quais são os valores de a, h e k?

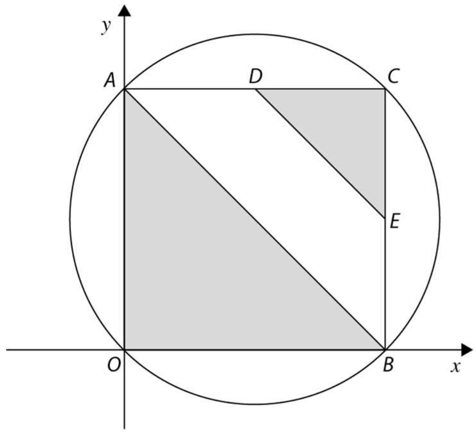
(A) $a = \frac{1}{2};\ h = -9$ e $k = -\frac{49}{2}$

(B) $a = -\frac{1}{2};\ h = 9$ e $k = \frac{49}{2}$

(C) $a = -1; h = 18$ e $k = -32$

(D) $a = -\frac{1}{2};\ h = 9$ e $k = -16$

3. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ e um quadrado $[OACB]$ inscrito na circunferência.



Sabe-se que:

- os vértices A e B do quadrado pertencem aos eixos coordenados;
- a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares e passa pelo centro da circunferência;
- $[ABED]$ é um trapézio isósceles;
- D é o ponto médio de $[AC]$.

3.1. Mostre que a circunferência tem centro no ponto de coordenadas $(2, 2)$ e raio $2\sqrt{2}$.

3.2. Em qual das opções se encontra uma equação vetorial da reta AB?

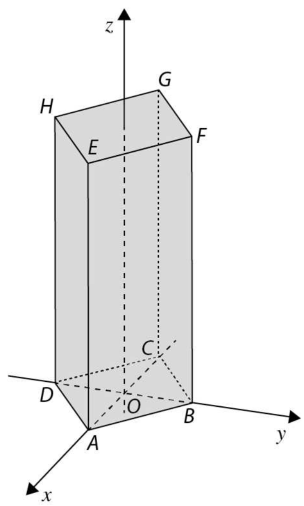
(A) $(x, y) = (2, 2) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$ **(B)** $(x, y) = (3, 3) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y) = (1, 1) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$ **(D)** $(x, y) = (1, 3) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$

3.3. Determine as coordenadas de todos os vértices do quadrado.

3.4. Escreva uma condição que defina a região do plano a sombreado, incluindo a fronteira.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular$[ABCDEFGH]$, cuja base está contida no plano xOy.



Sabe-se ainda que:

- os pontos $A(3, 0, 0)$ e $B(0, 3, 0)$ são dois dos vértices da base;
- o centro da base é a origem do referencial;
- a altura do prisma é 8.

4.1. Considere o ponto P, de coordenadas $(k^2 + 2k,\ k^2 + 3k,\ -13)$, com $k \in \mathbb{R}$.

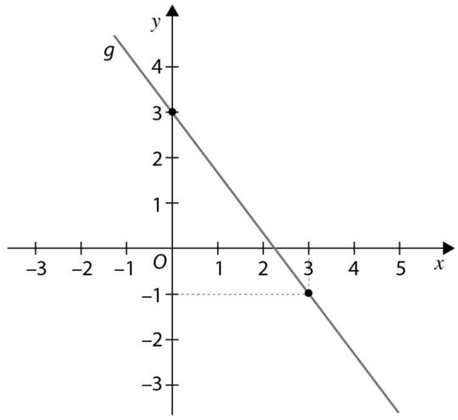
Qual é o valor de k para o qual o ponto P pertence à reta AE?

(A) -3 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 3

4.2. Considere a esfera centrada na origem e raio $\|\overrightarrow{AG}\|$ e considere também o plano α, plano mediador do segmento de reta $[BF]$.

Determine a área da interseção da esfera com o plano α.

5. Considere a função polinomial f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ e a função afim g representada graficamente por:



5.1. Qual é o valor de $(f \circ g)(3) + g^{-1}(3)$?

(A) -25 **(B)** -24 **(C)** 23 **(D)** 24

5.2. Sabendo que 1 é raiz dupla do polinómio que define a função f, determine, sem recorrer à calculadora, os valores de x que verificam a condição $f(x) < 0$.

Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

5.3. A função f tem três zeros. Recorrendo à calculadora gráfica, determine, com aproximação às décimas, o número real positivo k para o qual a função $f(x) + k$ tenha um único zero.

Explique como procedeu. Na sua resposta, deve incluir o(s) gráfico(s) visualizado(s) na sua calculadora e a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) que considere relevante(s) arredondada(s) às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**3.4.**	**4.1**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	
10	20	20	10	15	10	15	20	10	20	10	20	20	**200**