Teste de Matemática A

2019 / 2020

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ______________________________________ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

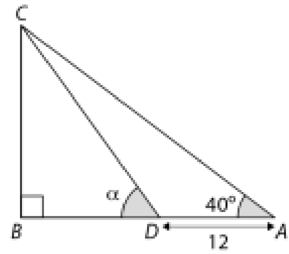
CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Considere a figura onde está representado o triângulo $[ABC]$, retângulo em B.

Sabe-se ainda que:

- $\overline{AD} = 12$;
- $B\hat{A}C = 40°$;
- α é o ângulo agudo tal que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.



Determine $\overline{BC}$.

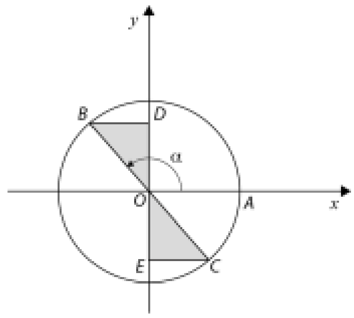
Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- $[BC]$ é um diâmetro da circunferência trigonométrica;
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy;
- as retas BD e EC são paralelas ao eixo Ox;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.



2.1. Mostre que o perímetro da região a sombreado na figura é dado, em função de α, por:

$$f(\alpha) = 2(1 + \text{sen}\,\alpha - \cos\alpha)$$

2.2. Sabe-se que, aumentando em 1 radiano um determinado valor de α, o perímetro da região a sombreado na figura diminui 20%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α, em radianos, com aproximação às centésimas.

2.3. Seja β tal que $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

Sabendo que $\text{tg}\,(\pi - \beta) = \frac{1}{3}$, determine o valor exato de $f(\beta)$.

Apresente a sua resposta na forma $a + b\sqrt{c}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

2.4. Considere agora a função F, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $F(\mathrm{x}) = 2(1 + \operatorname{sen} x - \cos x)$ e a função g definida por $g(x) = F\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - F(\pi + x)$.

Qual das expressões seguintes pode também definir a função g?

(A) $-4\cos x$

(B) $4\operatorname{sen} x$

(C) $4(\cos x + \operatorname{sen} x)$

(D) $4(\cos x - \operatorname{sen} x)$

3. Seja D o domínio da função f definida por $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{tg}(2x)$.

Assim, D é igual a:

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(B) $\mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(D) $\mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	
20	20	20	20	8	8	**96**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

4. Qual é o valor da expressão $\text{sen}^2(15°) + \text{sen}^2(75°) - \text{tg}(10°) \times \text{tg}(80°)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

5. Prove, para todo o x onde a igualdade tem significado, que:

$$\frac{(\text{sen}\, x - \cos x)^2}{\cos^2 x + \text{sen}^2 x} \times (1 + \text{tg}^2 x) = (1 - \text{tg}\, x)^2$$

6. Considere dois ângulos x_1 e x_2 que satisfazem a seguinte condição:

$$x_2 \in]-\pi, 0[\quad \wedge \quad \frac{\cos x_1}{\text{sen}\, x_2} < 0 \quad \wedge \quad \text{tg}\, x_1 \times \text{sen}\, x_2 > 0$$

A que quadrante pertence x_1?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

7. Considere as funções reais de variável real f e g definidas por:

$$f(x) = 1 + 2\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = 2 - 2\text{sen}^2 x + \sqrt{3}\cos x$$

7.1. A função f é uma função periódica de período:

(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $\frac{2\pi}{3}$ **(C)** 3π **(D)** π

7.2. Determine uma expressão geral dos minimizantes de f.

7.3. Determine os zeros da função g no intervalo $]-\pi, \pi[$.

8. Seja θ um valor pertencente ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a condição $2\,\text{sen}\theta = 1 - k^2$.

Determine os valores reais de k para os quais a condição é possível.

Apresente o resultado utilizando a notação de intervalos de números reais.

FIM DO CADERNO 2

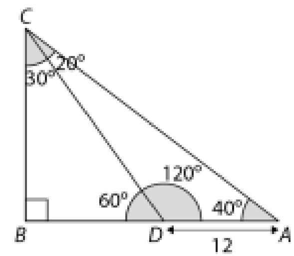
COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
4.	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**8.**	
8	20	8	8	20	20	20	**104**

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. α é o ângulo agudo tal que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.



Logo, $\alpha = 60°$.

Assim:

- $A\hat{D}C = 180° - 60° = 120°$
- $D\hat{C}A = 180° - 120° - 40° = 20°$
- $B\hat{C}D = 180° - 90° - 60° = 30°$

1.º processo

Pela lei dos senos, tem-se que:

$$\frac{\text{sen}20°}{12} = \frac{\text{sen}40°}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{12 \times \text{sen}40°}{\text{sen}20°}$$

Logo, $\overline{CD} \approx 22{,}553$.

Também se tem que:

$$\frac{\text{sen}90°}{22{,}553} = \frac{\text{sen}60°}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{22{,}553 \times \text{sen}60°}{\text{sen}90°}$$

Logo, $\overline{BC} \approx 19{,}531$.

Assim, $\overline{BC} \approx 19{,}5$.

2.º processo

Seja $x = \overline{BC}$ e $y = \overline{BD}$.

Sabemos que:

$$\begin{cases} \text{tg}60° = \frac{x}{y} \\ \text{tg}40° = \frac{x}{12+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}y = x \\ \text{tg}40° = \frac{\sqrt{3}y}{12+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 12\text{tg}40° + y\text{tg}40° = \sqrt{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ \sqrt{3}y - y\text{tg}40° = 12\text{tg}40° \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y(\sqrt{3} - \text{tg}40°) = 12\text{tg}40° \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y = \frac{12\text{tg}40°}{\sqrt{3}-\text{tg}40°} \end{cases}$$

Assim, $y \approx 11{,}276$.

Logo, $x = \sqrt{3}\, y \approx 19{,}531$.

Então, $\overline{BC} \approx 19{,}5$.

2.

2.1. $f(\alpha) = 2\left(\overline{OB} + \overline{OD} + \overline{BD}\right) = 2\left(1 + \text{sen}\alpha + (-\cos\alpha)\right) = 2(1 + \text{sen}\alpha - \cos\alpha)$

Observe-se que, como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\cos\alpha < 0$. Logo, $\overline{BD} = -\cos\alpha$.

2.2. Sabe-se que, para um determinado valor de α, $f(\alpha + 1) = f(\alpha) - 0{,}2 \times f(\alpha)$, isto é, $f(\alpha + 1) = 0{,}8 \times f(\alpha)$.

Pretende−se, então, resolver a equação:

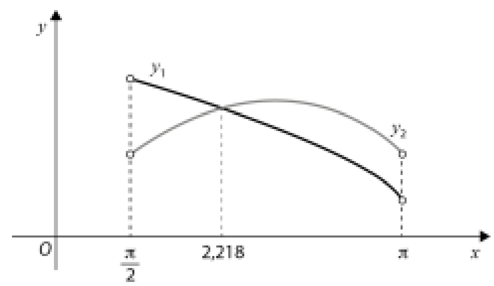
$$2(1 + \text{sen}(\alpha + 1) - \cos(\alpha + 1)) = 0{,}8 \times 2(1 + \text{sen}\alpha - \cos\alpha)$$

Recorrendo à calculadora gráfica:

$y_1 = 2(1 + \text{sen}(x + 1) - \cos(x + 1))$

$y_2 = 0{,}8 \times 2(1 + \text{sen}x - \cos x)$

Assim, $\alpha \approx 2{,}22$ rad.



2.3. $\text{tg}(\pi - \beta) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\text{tg}\beta = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{tg}\beta = -\frac{1}{3}$

- Como $1 + \text{tg}^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$, tem-se que:

$$1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{9}{10}$$

$$\Leftrightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\beta = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Como $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, vem que $\cos\beta < 0$. Logo, $\cos\beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

- Como $\text{tg}\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}$, tem-se que:

$$-\frac{1}{3} = \frac{\text{sen}\beta}{-\frac{3\sqrt{10}}{10}} \Leftrightarrow \text{sen}\beta = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow \text{sen}\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Assim:

$$f(\beta) = 2(1 + \text{sen}\beta - \cos\beta) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{10} - \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{4\sqrt{10}}{10}\right) =$$

$$= 2 + \frac{4}{5}\sqrt{10}$$

2.4. Opção (B)

$$g(x) = F\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - F(\pi + x) =$$

$$= 2\left(1 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) - 2\big(1 + \text{sen}(\pi + x) - \cos(\pi + x)\big) =$$

$$= 2(1 + \cos x - (-\text{sen}x)) - 2(1 - \text{sen}x - (-\cos x)) =$$

$$= 2 + 2\cos x + 2\text{sen}x - 2 + 2\text{sen}x - 2\cos x =$$

$$= 4\text{sen}x$$

3. Opção (C)

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}: 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \mathbb{R} \backslash \left\{x: x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

<u>Caderno 2</u>

4. Opção (B)

$$\text{sen}^2(15°) + \text{sen}^2(75°) - \text{tg}(10°) \times \text{tg}(80°) = \text{sen}^2(15°) + \cos^2(90° - 75°) - \frac{\text{sen}(10°)}{\cos(10°)} \times \frac{\text{sen}(80°)}{\cos(80°)} =$$

$$= \text{sen}^2(15°) + \cos^2(15°) - \frac{\text{sen}(10°)}{\cos(10°)} \times \frac{\cos(90°-80°)}{\text{sen}(90°-80°)} =$$

$$= 1 - \frac{\text{sen}(10°) \times \cos(10°)}{\cos(10°) \times \text{sen}(10°)} =$$

$$= 1 - 1 =$$

$$= 0$$

5. $$\frac{(\text{sen}x - \cos x)^2}{\cos^2 x + \text{sen}^2 x} \times (1 + \text{tg}^2 x) = \frac{\text{sen}^2 x - 2\text{sen}x\cos x + \cos^2 x}{1} \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\text{sen}x\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1 - 2\text{sen}x\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\text{sen}x\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - 2\frac{\text{sen}x}{\cos x} =$$

$$= 1 + \text{tg}^2 x - 2\text{tg}x =$$

$$= (1 - \text{tg}x)^2$$

6. Opção (D)

Como $x_2 \in]-\pi, 0[$, vem que $\text{sen}x_2 < 0$ e, como $\frac{\cos x_1}{\text{sen}x_2} < 0$, então $\cos x_1 > 0$.

Por outro lado, como $\text{tg}x_1 \times \text{sen}x_2 > 0$, então $\text{tg}x_1 < 0$.

Então, x_1 é tal que $\cos x_1 > 0$ e $\text{tg}x_1 < 0$, o que se verifica no 4.º quadrante.

7.

7.1. Opção (B)

$f(x) = 1 + 2\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

- $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\text{sen}\left(3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\text{sen}\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right)$, logo não é verdade que para todo o x se verifique $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$
- $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1 + 2\text{sen}\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\text{sen}\left(3x + 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

  $= 1 + 2\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) =$

  $= f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, logo f é periódica de período $\frac{2\pi}{3}$.
- $f(x + 3\pi) = 1 + 2\text{sen}\left(3(x + 3\pi) + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\text{sen}\left(3x + 9\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

  $= 1 + 2\text{sen}\left(3x + \pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

  $= 1 + 2\text{sen}\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right)$, logo não é verdade que para todo o x se verifique $f(x + 3\pi) = f(x)$.
- $f(x + \pi) = 1 + 2\text{sen}\left(3(x + \pi) + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\text{sen}\left(3x + 3\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

  $= 1 + 2\text{sen}\left(3x + \pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

  $= 1 + 2\text{sen}\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right)$, logo não é verdade que para todo o x se verifique $f(x + \pi) = f(x)$.

7.2. Sabemos que:

$-1 \leq \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$

$\Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 3$

Temos que $D'_f = [-1,3]$.

-1 é então mínimo de f, logo os minimizantes são os valores de x tais que $f(x) = -1$.

$$1 + 2\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

7.3. $g(x) = 0$

Assim:

$$2 - 2\text{sen}^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \text{sen}^2 x) + \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \ \vee \ 2\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \vee \ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \vee \ x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $]-\pi, \pi[$, os zeros de g são $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ e $-\frac{5\pi}{6}$.

8. $2\text{sen}\theta = 1 - k^2 \Leftrightarrow \text{sen}\theta = \frac{1-k^2}{2}$

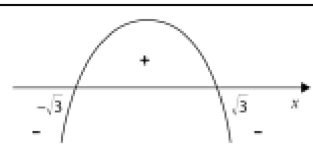
Como $\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, então $-1 \leq \text{sen}\theta < 0$. Assim:

$$-1 \leq \frac{1-k^2}{2} < 0 \Leftrightarrow -2 \leq 1 - k^2 < 0 \Leftrightarrow 1 - k^2 \geq -2 \ \wedge \ 1 - k^2 < 0$$

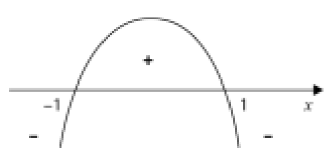
$$\Leftrightarrow 3 - k^2 \geq 0 \ \wedge \ 1 - k^2 < 0$$

Cálculos auxiliares

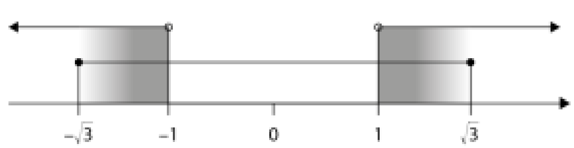
- $3 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 3 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3}$



- $1 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$



$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3} \ \wedge \ (k < -1 \ \vee \ k > 1)$$



Logo, $k \in [-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}]$.