Teste de Matemática A

2021 / 2022

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

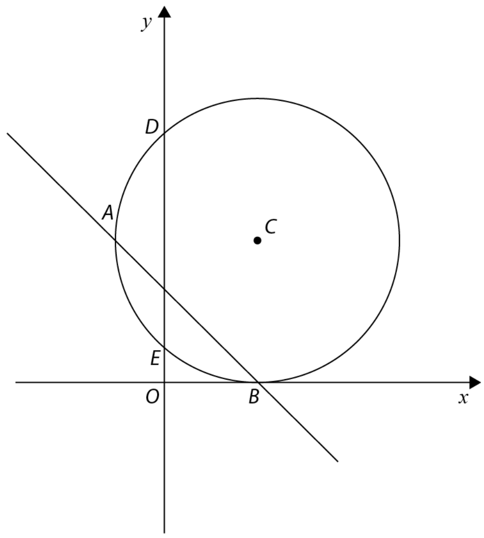
Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro no ponto C, tangente ao eixo Ox, os pontos A, B, C, D e E e a reta AB.



Sabe-se, ainda, que:

- a circunferência é definida por $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -4$;
- A é o ponto da circunferência de abcissa negativa e ordenada igual à do ponto C;
- B é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox;
- D e E são os pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy, sendo D o ponto de maior ordenada.

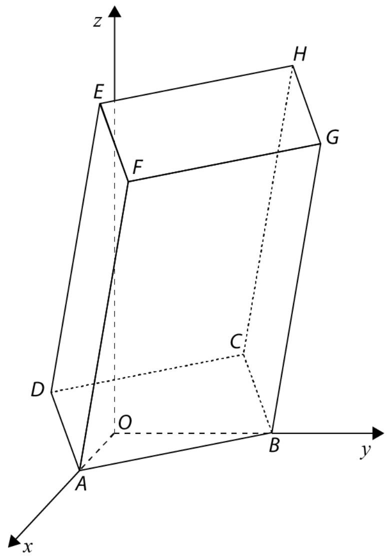
1.1. Mostre que as coordenadas do ponto C são $(2, 3)$.

1.2. Determine a equação reduzida da reta AB.

1.3. Determine o valor exato da área do triângulo $[DEC]$.

2. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma retangular reto $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:



- o ponto A tem coordenadas $(4,0,0)$;
- o ponto B tem coordenadas $(0,6,0)$;
- o ponto D tem coordenadas $(1,-2,2)$;
- o ponto H tem coordenadas $(3,8,15)$.

2.1. O plano paralelo a xOz que passa no ponto H pode ser definido por:

(A) $x = 3$

(B) $y = 8$

(C) $z = 15$

(D) $x = 3 \wedge z = 15$

2.2. Determine uma equação vetorial da reta paralela à reta DB que passa em F.

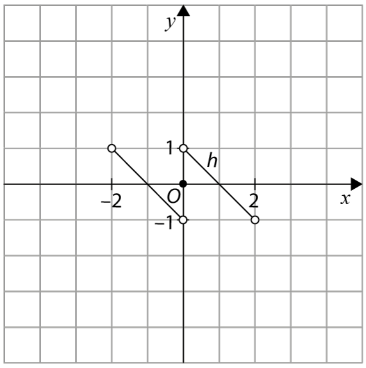
2.3. Determine uma equação do plano mediador de $[AD]$.

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

2.4. Considere a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

Determine o valor exato do perímetro da interseção da superfície esférica com o plano yOz.

3. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o gráfico de uma função h, de domínio $]-2,2[$.



Considere as seguintes proposições:

I. A função h é decrescente no seu domínio.

II. A função h não tem extremos.

III. A função h é par.

Acerca das proposições anteriores, podemos afirmar que:

(A) são todas verdadeiras.

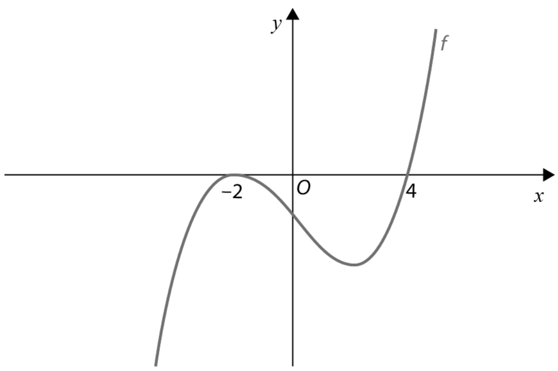
(B) são todas falsas.

(C) apenas a afirmação I é verdadeira.

(D) apenas a afirmação II é verdadeira.

4. Na figura está representada graficamente parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que a função f tem apenas dois zeros: -2 e 4.



Seja g a função definida por $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f\left(\frac{1}{2}x\right)}$.

Qual dos seguintes conjuntos é o domínio da função h?

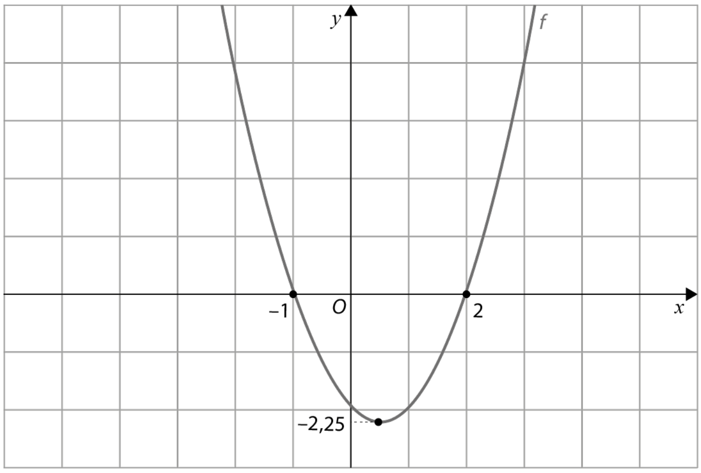
(A) $[4, +\infty[$

(B) $]4, +\infty[$

(C) $\{-2\} \cup [4,8[\cup]8, +\infty[$

(D) $\{-2\} \cup]4,8[\cup]8, +\infty[$

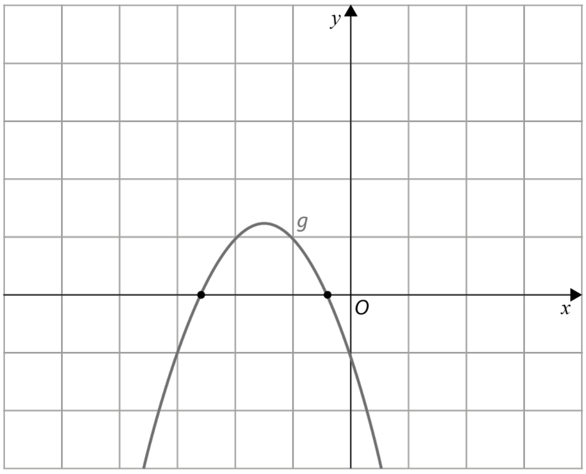
5. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura.



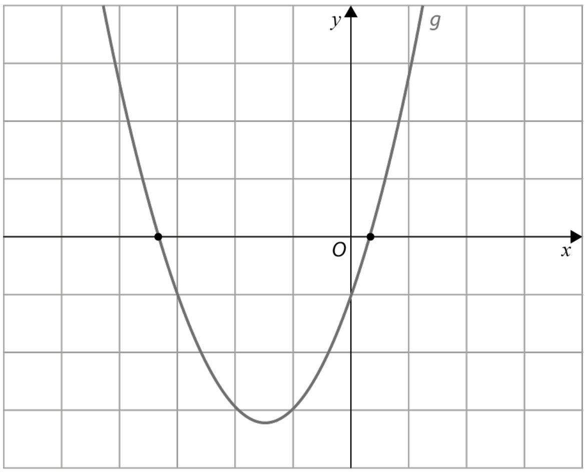
Seja g a função definida por $g(x) = -f(x+2) - 1$.

Em qual das opções seguintes pode estar a representação gráfica da função g?

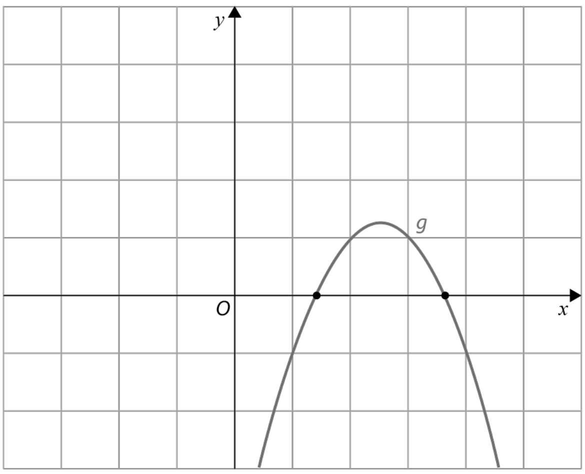
(A)



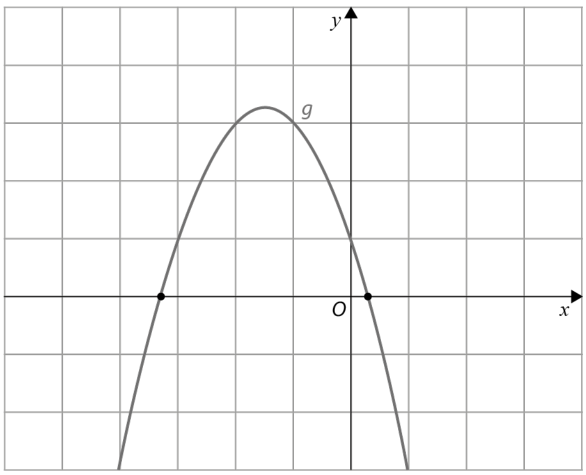
(B)



(C)



(D)



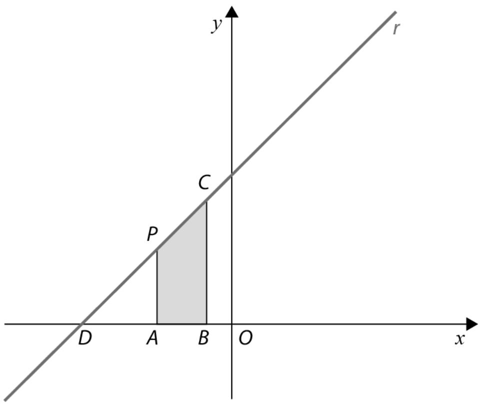
6. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a reta r.

O ponto D é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox e o ponto C é o ponto da reta de abcissa igual a -1.

O ponto B tem coordenadas $(-1,0)$.

Sabe-se que a reta r é definida pela equação $y = x + 6$.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[DC]$, nunca coincidindo com o ponto D nem com o ponto C, e que o ponto A é a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox. Seja x a abcissa do ponto P.



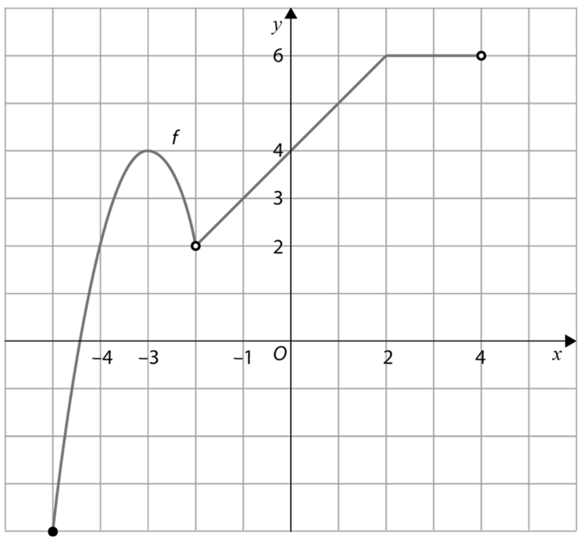
Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

6.1. Mostre que a área do trapézio $[ABCP]$ é dada, em função de x, por:

$$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{11}{2}, \; -6 < x < -1$$

6.2. Determine o conjunto de valores de x para os quais a área do trapézio $[ABCP]$ é superior a 8 unidades de área. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

7. Na figura está representada graficamente a função real de variável real f, de domínio $[-5,-2[\cup]-2,4[$. Sabe-se que $(-4,2)$, $(-3,4)$, $(-1,3)$ e $(2,6)$ são pontos do gráfico da função f e parte do gráfico é constituído por uma parábola de vértice de coordenadas $(-3,4)$.



Qual das expressões seguintes pode definir a função f?

(A) $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 4 & \text{se} \quad -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se} \quad -2 < x < 2 \\ 6 & \text{se} \quad 2 \leq x < 4 \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & \text{se} \quad -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se} \quad -2 < x < 2 \\ 6 & \text{se} \quad 2 \leq x < 4 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} 2(x+3)^2 + 4 & \text{se} \quad -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se} \quad -2 < x < 2 \\ 6x & \text{se} \quad 2 \leq x < 4 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & \text{se} \quad -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se} \quad -2 \leq x < 2 \\ 6 & \text{se} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

8. Considera as funções f e g definidas por:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{-2x}{1-x}$$

Considere, num referencial ortonormado do plano, os gráficos das funções f e g e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B são os pontos de interseção do gráfico de f com o semieixo Ox negativo, sendo A o ponto de menor abcissa;
- o ponto C é o ponto de interseção dos gráficos de f e de g com ordenada positiva.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a área do triângulo $[ABC]$.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A, B e C e, nas coordenadas dos pontos em que é necessário fazer arredondamentos, utilizar duas casas decimais;
- desenhar o triângulo $[ABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.**	**Total**
16	16	16	10	17	17	17	10	10	10	17	17	10	17	**200**

Teste N.º 4 – Proposta de resolução

1.

1.1. $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$

Logo, $C(2,3)$.

1.2. $A(\ldots, 3)$

$\begin{cases} y = 3 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ (x-2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x - 2 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

$A(-1,3)$, pois A tem abcissa negativa.

$B(\ldots, 0)$

$\begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$B(2,0)$

$AB: y = mx + b$

$m = \dfrac{0-3}{2+1} = -\dfrac{3}{3} = -1$

$y = -x + b$

Como o ponto $B(2,0)$ pertence à reta, vem que: $0 = -2 + b \Leftrightarrow b = 2$

$AB: y = -x + 2$

1.3. $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 6y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 6y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\times 4}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \pm \sqrt{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$

$D(0, 3+\sqrt{5})$, pois D é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox de maior ordenada.

$E(0, 3-\sqrt{5})$

$\overline{DE} = \left(3+\sqrt{5}\right) - \left(3-\sqrt{5}\right) = 3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$A_{[DEC]} = \frac{\overline{DE} \times \text{abcissa de } C}{2} = \frac{2\sqrt{5}\times 2}{2} = 2\sqrt{5}$ u.a.

2.

2.1. Opção (B)

Um plano paralelo ao plano xOz pode ser definido por uma condição do tipo $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$.

Como passa pelo ponto $H(3,8,15)$, então $y = 8$ define o plano paralelo a xOz que passa no ponto H.

2.2. $\overrightarrow{DB} = (0,6,0) - (1,-2,2) = (-1,8,-2)$

$\overrightarrow{BA} = (4,0,0) - (0,6,0) = (4,-6-0)$

$\overrightarrow{DA} = (4,0,0) - (1,-2,2) = (3,2,-2)$

$$F = H + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = (3,8,15) + (4,-6,0) + (3,2,-2) =$$
$$= (7,2,15) + (3,2,-2) =$$
$$= (10,4,13)$$

Uma equação vetorial da reta paralela á reta DB que passa em F é:

$$(x, y, z) = (10,4,13) + k(-1,8,-2), k \in \mathbb{R}$$

2.3. $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 4z + 4$

$\Leftrightarrow -8x + 2x - 4y + 4z + 16 - 1 - 4 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow -6x - 4y + 4z + 7 = 0$

2.4. Seja M o ponto médio do segmento de reta [*AB*]:

$$M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

$M(2, 3, 0)$

$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

O raio da superfície esférica de diâmetro [*AB*] é igual a $\sqrt{13}$.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13$ define a superfície esférica de diâmetro [*AB*].

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4 + (y-3)^2 + z^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (y-3)^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$ Circunferência de centro (0,3,0) e raio 3.

$P_{\text{circunferência}} = 2\pi \times r = 2\pi \times 3 = 6\pi$

O perímetro da interseção da superfície esférica com o plano yOz é igual a 6π.

3. Opção (D)

$h\left(-\frac{1}{2}\right) < h\left(\frac{1}{2}\right)$, logo h não é decrescente no seu domínio.

$D_h =]-1{,}1[, D'_h =]-1{,}1[$, h é decrescente em $]-1{,}0[$ e em $]0{,}1[$ e $h(0)$ não é extremo, logo h não tem extremos.

O gráfico de h não é simétrico em relação ao eixo Oy, logo h não é par.

4. Opção (C)

$D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0 \wedge f\left(\frac{1}{2}x\right) \neq 0\right\}$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \ \vee \ x = -2$

$f\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -2 \ \vee \ \frac{1}{2}x = 4$

$\Leftrightarrow x = -4 \ \vee \ x = 8$

$D_g = \{x \in \mathrm{IR}: (x \geq 4 \ \vee \ x = -2) \ \wedge \ (x \neq -4 \ \wedge \ x \neq 8)\} \ = \{-2\} \cup [4{,}8[\cup]8, +\infty[$

5. Opção (A)

O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f segundo as seguintes transformações sucessivas:

- translação horizontal associada ao vetor $(-2, 0)$;
- simetria em relação ao eixo Ox;
- translação vertical associada ao vetor $(0, -1)$.

6.

6.1. $D(\ldots, 0)$

$0 = x + 6 \Leftrightarrow x = -6$

$D(-6, 0)$

$C(-1, \ldots)$

$y = -1 + 6 \Leftrightarrow y = 5$

$C(-1, 5)$

$P(x, x+6), \quad -6 < x < -1$

$$A_{[ABCP]} = \frac{\overline{AP} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB} =$$

$$= \frac{x+6+5}{2} \times (-x-1) =$$

$$= \frac{x+11}{2} \times (-x-1) =$$

$$= \frac{1}{2} \times (-x^2 - x - 11x - 11) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{11}{2}, -6 < x < -1$$

6.2. $A(x) > 8 \wedge -6 < x < -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{11}{2} > 8 \ \wedge \ -6 < x < -1$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 12x - 11 > 16 \ \wedge \ -6 < x < -1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 12x - 27 > 0 \ \wedge \ -6 < x < -1$$

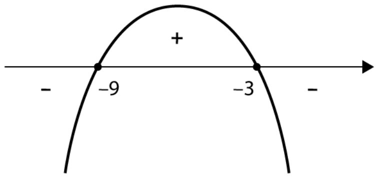
Cálculos auxiliares

$$-x^2 - 12x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times (-1) \times (-27)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm 6}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -9 \ \vee \ x = -3$$



$$-x^2 - 12x - 27 > 0 \ \wedge \ -6 < x < -1 \Leftrightarrow -9 < x < -3 \ \wedge \ -6 < x < -1$$

$$\Leftrightarrow -6 < x < -3$$

C.S. = $]-6, -3[$

7. Opção (B)

- Para $x \in [-5, -2[$:

  $f(x) = a(x+3)^2 + 4$

  Como $f(-4) = 2$, então:

  $a(-4+3)^2 + 4 = 2 \Leftrightarrow a + 4 = 2 \Leftrightarrow a = -2$

  $f(x) = -2(x+3)^2 + 4$

- Para $x \in]-2, 2]$:

  $f(x) = mx + b$

  $m = \dfrac{6-3}{2+1} = \dfrac{3}{3} = 1$

  $f(x) = x + b$

  Como $f(-1) = 3$, então:

  $3 = -1 + b \Leftrightarrow b = 4$

  $f(x) = x + 4$

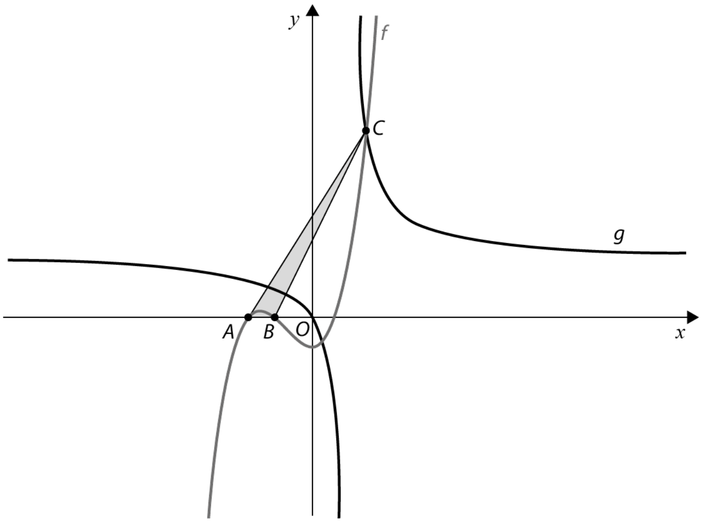
- Para $x \in [2, 4[$: $f(x) = 6$

  Logo:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & \text{se } -5 \leq x < 2 \\ x + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 6 & \text{se } \ 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

8. Representemos graficamente, com recurso à calculadora gráfica, as funções f e g definidas por:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{-2x}{1-x}$$



$A(-1{,}62; 0)$ $\qquad B(-1; 0)$ $\qquad C(1{,}46; 6{,}36)$

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \text{ordenada de } C}{2} = \frac{0{,}62 \times 6{,}36}{2} \approx 1{,}97$ u.a.