Teste de Matemática A

2021 / 2022

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=(1-\cos x\,\mathrm{sen}\,x)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)+\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$$

1.1. Prove que $f(x)=\cos^3 x+\mathrm{sen}^3 x$.

1.2. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, os valores de x que satisfazem a condição $f(x)=2\cos^3 x$.

1.3. No intervalo $[0,\pi]$, o gráfico da função f tem um ponto A, cuja distância à origem é igual a 2.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine as coordenadas do ponto A, apresentando os valores aproximados às centésimas.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas do ponto A, com a aproximação pedida.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r de inclinação α.

Sabe-se que $\mathrm{sen}\,\alpha=\frac{1}{3}$.

Qual pode ser a equação reduzida da reta r?

(A) $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x$ **(B)** $y=2\sqrt{2}x$ **(C)** $y=-\sqrt{3}x$ **(D)** $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

3. Considere, num referencial o.n. xOy, a circunferência definida pela equação:

$$x^2+(y-1)^2=2$$

Sejam:

- A o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo das abcissas;
- B o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo das ordenadas;
- r a reta tangente à circunferência no ponto A;
- s a reta tangente à circunferência no ponto B;
- C o ponto de interseção das retas r e s.

Determine o valor exato da área do trapézio $[OACB]$.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 2z = 4$$

Seja C o centro da superfície esférica.

4.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular ao plano xOy e que passa no ponto C?

(A) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (1, -2, -1) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(0, 0, -1), k \in \mathbb{R}$

4.2. Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa negativa, ordenada 3 e cota 1.

Determine uma equação do plano que é tangente à superfície esférica no ponto P.

4.3. Seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOz. Determine a amplitude do ângulo AOC. Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5. Considera a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + 2022}$$

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) (u_n) é monótona.

(B) (u_n) não é limitada.

(C) (u_n) é convergente para 0.

(D) $\lim u_n = +\infty$

6. O limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ é:

(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(C)** $\sqrt{2} + 2$ **(D)** $\sqrt{2} - 1$

7. Sabe-se que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

Mostre que a sucessão definida por $v_n = 10^{2u_n}$ é uma progressão geométrica e indique a razão.

8. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = \frac{6n^3+2n^2-1}{n-2n^3} \quad \text{e} \quad b_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

Seja $A = \lim\ a_n$ e $B = \lim\ b_n$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $A \times B = +\infty$

(B) $A \times B = -\infty$

(C) $\frac{A}{B} = +\infty$

(D) $\frac{B}{A} = 0$

- FIM -

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.1	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
20	20	25	10	25	10	20	20	10	10	20	10	**200**

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1.

1.1. $f(x) = (1 - \cos x \operatorname{sen} x)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) =$

$= (1 - \cos x \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x) =$

$= \operatorname{sen} x + \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \operatorname{sen} x =$

$= \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x =$

$= \cos x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x\,(1 - \cos^2 x) =$

$= \cos x \times \cos^2 x + \operatorname{sen} x \times \operatorname{sen}^2 x =$

$= \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x$

1.2. $f(x) = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x = 2\cos^3 x - \cos^3 x$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x = \cos^3 x$

$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} = 1 \quad \wedge \quad \cos^3 x \neq 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x = 1 \quad \wedge \quad \cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt[3]{1} \quad \wedge \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \quad \wedge \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \wedge \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

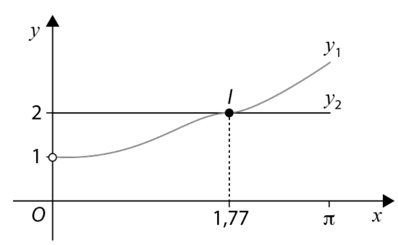
1.3. Consideremos a função f, definida em $[0, \pi]$. Como A é um ponto do gráfico de f, as coordenadas de A são da forma $(x, f(x))$, ou seja, $(x, \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x)$, com $x \in [0, \pi]$.

Para que a distância de A à origem seja igual a 2:

$d(O, A) = \sqrt{(x-0)^2 + (\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x - 0)^2} = 2,$

ou seja, $\sqrt{x^2 + (\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x)^2} = 2.$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



$y_1 = \sqrt{x^2 + (\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x)^2}$

$y_2 = 2$

Seja I o ponto de interseção.

As coordenadas de I são $(1{,}77;\ 2)$

Logo, as coordenadas do ponto A são $\left(1{,}77;\ f(1{,}77)\right)$, ou seja, $(1{,}77;\ 0{,}93)$.

Cálculo auxiliar

$f(1{,}77) = \cos^3(1{,}77) + \operatorname{sen}^3(1{,}77) \approx 0{,}93$

2. Opção (A)

$$\text{sen}\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$$

Como $\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$$

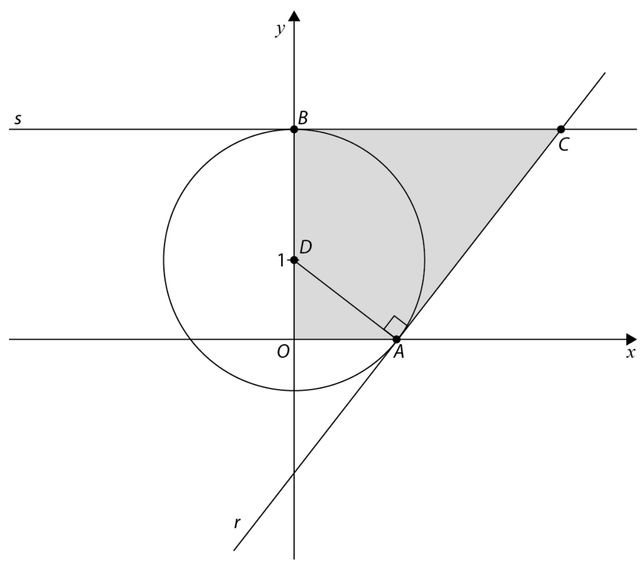
$$\Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Como o declive da reta r é $\text{tg}\alpha$, das opções apresentadas, apenas a reta de equação $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x$ cumpre as condições.

3. Seja *D* o centro da circunferência, $D(0,1)$.



- $A(x, 0)$, com $x > 0$

  $x^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2$

  $\Leftrightarrow x^2 = 1$

  $\Leftrightarrow x = \pm 1$

  $A(1,0)$

- $B(0, y)$, com $y > 0$

  $0^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 2$

  $\Leftrightarrow y - 1 = \pm\sqrt{2}$

  $\Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{2} \ \vee \ y = 1 - \sqrt{2}$

  $B\left(0, 1+\sqrt{2}\right)$

- $r: y = mx + b$, onde $m = -\frac{1}{m_{AD}} = 1$

  $y = x + b$

  Como $A \in r$, vem que:

  $0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

  $r: y = x - 1$

- $s: y = 1 + \sqrt{2}$
- O ponto C é o ponto de interseção das retas r e s:

Cálculo auxiliar

$A(1,0)$

$D(0,1)$

$m_{AD} = \frac{1-0}{0-1} = -1$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{2} = x - 1 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$C(2+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$

Assim, a área do trapézio $[OACB]$ é:

$$A_{[OACB]} = \frac{\overline{BC} + \overline{OA}}{2} \times \overline{OB} = \frac{(2+\sqrt{2}) + 1}{2} \times (1+\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{(3+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})}{2} =$$

$$= \frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{2}+2}{2} =$$

$$= \frac{5+4\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{5}{2} + 2\sqrt{2}$$

4.

4.1. Opção (D)

$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 2z = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 = 4 + 1 + 4 + 1$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 10$

Assim, C é o centro da superfície esférica e tem coordenadas $(-1, 2, 1)$.

Para a reta ser perpendicular ao plano xOy, o seu vetor diretor tem de ser colinear com o vetor $(0, 0, 1)$. Assim, as opções (A) e (B) não podem ser uma equação da reta pretendida.

Vejamos a qual das retas representadas, nas opções (C) e (D), o ponto $C(-1, 2, 1)$ pertence:

$(x, y, z) = (1, -2, -1) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

$(-1, 2, 1) = (1, -2, -1) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

$(-1, 2, 1) = (1, -2, -1 + k)$ – não existe nenhum valor real de k nestas condições.

$(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(0, 0, -1), k \in \mathbb{R}$

$(-1, 2, 1) = (-1, 2, 3) + k(0, 0, -1), k \in \mathbb{R}$

$(-1, 2, 1) = (-1, 2, 3 - k)$, que é uma proposição verdadeira, para $k = 2$.

Logo, a reta de equação $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(0, 0, -1), k \in \mathbb{R}$ contém o ponto $C(-1, 2, 1)$ e é perpendicular ao plano xOy

4.2. Sabemos que $P(a, 3, 1)$, com $a < 0$, pertence à superfície esférica, logo:

$(a+1)^2 + (3-2)^2 + (1-1)^2 = 10 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow a + 1 = 3 \quad \vee \quad a + 1 = -3$

$$\Leftrightarrow a = 2 \quad \vee \quad a = -4$$

Como $a < 0$, então $a = -4$.

Assim, $P(-4, 3, 1)$.

Como C é o centro da superfície esférica, $\overrightarrow{CP}$ é um vetor normal ao plano α:

$\overrightarrow{CP} = (-4,3,1) - (-1,2,1) = (-3,1,0)$

Logo, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto P é $-3(x+4) + (y-3) = 0$, que é equivalente a $-3x + y - 15 = 0$.

4.3. $C(-1,2,1)$ e $A(-1,-2,1)$

Tem-se que $A\hat{O}C = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})$ e $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|}$.

Então:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{(-1,-2,1).(-1,2,1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{1-4+1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = -\frac{1}{3}$$

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$, isto é, $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) \approx 109{,}5°$.

5. Opção (C)

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+2022} = \begin{cases} -\dfrac{1}{n+2022} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{1}{n+2022} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$u_1 = -\frac{1}{2023}$$

$$u_2 = \frac{1}{2024}$$

$$u_3 = -\frac{1}{2025}$$

Como $u_1 < u_2 \ \wedge \ u_2 > u_3$, então pode concluir-se que (u_n) é não monótona.

$\lim\left(-\frac{1}{n+2022}\right) = 0^-$ e $\lim\left(\frac{1}{n+2022}\right) = 0^+$, logo $\lim(u_n) = 0$.

Além do referido, verifica-se que:

- quando n é ímpar, temos uma subsucessão de termos de (u_n) crescente;
- quando n é par, temos uma subsucessão de termos decrescentes e, como $u_1 = -\frac{1}{2023}$ e $u_2 = \frac{1}{2024}$, vem que $-\frac{1}{2023} < u_n < \frac{1}{2024}$, $\forall n \in \mathrm{IN}$, ou seja, (u_n) é limitada.

6. Opção (C)

$$\lim u_n = \lim \left(\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}}_{\substack{\text{Soma de } n \text{ termos de uma progressão} \\ \text{geométrica de razão } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e 1.º termo 1}}}\right) = \lim\left(\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\times 1\right) =$$

$$= \frac{1-0}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}\times 1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{2+\sqrt{2}}{1} = 2+\sqrt{2}$$

7. Sabemos que $u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{10^{2u_{n+1}}}{10^{2u_n}} = 10^{2u_{n+1}-2u_n} = 10^{2(u_n+3)-2u_n} =$$

$$= 10^{2u_n+6-2u_n} =$$

$$= 10^6, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja, (v_n) é uma progressão geométrica de razão igual a 10^6.

8. Opção (D)

$$A = \lim\ a_n \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{6n^3+2n^2-1}{n-2n^3} = \lim \frac{6n^3\left(1+\frac{2}{6n}-\frac{1}{6n^3}\right)}{-2n^3\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)} =$$

$$= \lim \frac{6\left(1+\frac{1}{3n}-\frac{1}{6n^3}\right)}{-2\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)} =$$

$$= \lim \frac{6\times(1+0-0)}{-2\times(1-0)} =$$

$$= -3$$

$$B = \lim\ b_n = \lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1})^2-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \lim \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \frac{1}{+\infty+\infty} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0^+$$

Assim, $A \times B = -3 \times 0 = 0$; $\frac{A}{B} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ e $\frac{B}{A} = \frac{0^+}{-3} = 0$.