Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

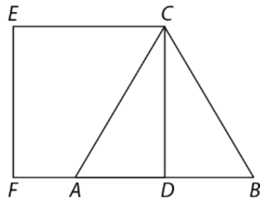
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura estão representados o triângulo equilátero $[ABC]$ e o quadrado $[EFDC]$.

Sabe-se que:

- o ponto D é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$;
- o perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a $3\sqrt{5}$ unidades de comprimento.



A área do quadrado $[EFDC]$ é igual a:

(A) $\frac{5}{2}$ **(B)** $\frac{15}{4}$ **(C)** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{15}}{2}$

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, para quaisquer a e b reais?

(A) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a-b}$

(B) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[15]{a \times b}$

(C) $\sqrt[9]{a} \div \sqrt[3]{b} = \sqrt[9]{\frac{a}{b^3}}$

(D) $\sqrt{a^2} = a$

3. A solução da equação $2\sqrt{3}x - 1 = 3\sqrt{2}x + 3$ é:

(A) $\frac{4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{3}$

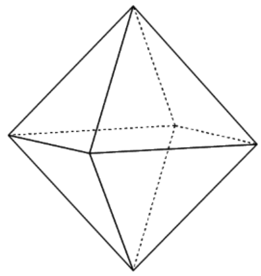
(B) $\frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{3}$

(C) $\frac{4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{3}$

(D) $\frac{-4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{3}$

4. Na figura está representado um octaedro regular (sólido constituído por oito faces que são triângulos equiláteros), cujas arestas medem a unidades.

Prove que o volume desse octaedro regular é igual a $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ unidades de volume.



5. Fixado um referencial o.n. do plano, considere a seguinte condição:

$$y - x + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad \sim(x < 0) \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 4$$

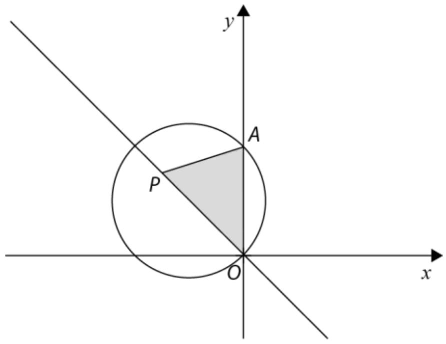
Sabe-se que a representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido pela condição anterior é um trapézio.

Represente-o num referencial e determine o valor exato da sua área.

6. Num referencial cartesiano do plano Oxy, considere a representação gráfica da figura.

Na figura estão representados:

- a bissetriz dos quadrantes pares;
- a circunferência definida por $(x+a)^2+(y-a)^2=2a^2$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a>2$;
- o ponto A, interseção da circunferência com o eixo das ordenadas e de ordenada positiva;
- o ponto P, que pertence à bissetriz dos quadrantes pares e que tem ordenada positiva;
- o triângulo $[OAP]$.



Sabendo que a área do triângulo $[OAP]$ é igual a $4a$ unidades de área, determine as coordenadas do ponto P.

7. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy, os pontos $A(4,2)$, $B(3,4)$ e $C(x,y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

7.1. Escreva a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$.

7.2. Determine o(s) valor(es) de x de modo que o triângulo $[ABC]$ seja equilátero.

8. A expressão $\sqrt[6]{4a^4} \times (2^2a^{-2}b^{12})^{-\frac{1}{6}}$, para quaisquer números reais positivos a e b, é igual a:

(A) $\frac{\sqrt[3]{a}}{b^{-2}}$

(B) $\frac{a}{b^2}$

(C) $\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2}$

(D) $\frac{a}{b^{-2}}$

9. Considere, num referencial o.n. Oxy, a linha definida pela condição:

$$(x+2)^2+(y-1)^2 \leq 9 \quad \wedge \quad y-x-3=0$$

Qual é o comprimento dessa linha?

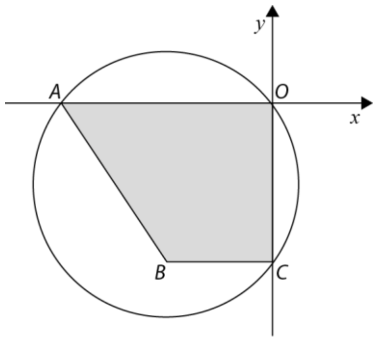
(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 12

10. Considere, num referencial ortonormado, o ponto $A(0, 3)$ e um ponto B tal que o quadrado da sua abcissa é doze vezes a sua ordenada. Seja y a ordenada de B.

Mostre que $\overline{AB} = y + 3$.

11. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência definida pela condição $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$ e o trapézio $[OABC]$.

Sabe-se, ainda, que:



- A e O são os pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox, sendo A o ponto de menor abcissa;
- C e O são os pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy, sendo C o ponto de menor ordenada;
- o ponto B tem abcissa igual à abcissa do centro da circunferência;
- a reta BC é paralela ao eixo Ox.

11.1. Prove que o centro da circunferência tem coordenadas $(-4, -3)$.

11.2. Seja D o centro da circunferência.

Determine a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[OD]$.

11.3. Defina por uma condição o trapézio $[OABC]$.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**11.3.**	
10	10	10	15	15	20	15	20	10	10	15	15	15	20	**200**

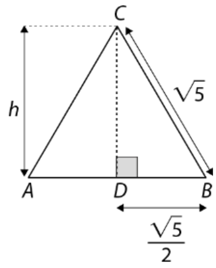
Teste N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$P_{[ABC]} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 3\overline{AB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{5}$

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 5 = h^2 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow 5 - \frac{5}{4} = h^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{4} = h^2$$



$A_{[EFDC]} = \frac{15}{4}$

2. Opção (C)

(A) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{27} = 2 - 3 = -1$

$\sqrt[3]{8-27} = \sqrt[3]{-19} \neq -1$

$\forall a, b \in \mathrm{IR},\ \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a-b}$ é uma proposição falsa.

(B) $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[5]{-1} = 2 \times (-1) = -2$

$\sqrt[15]{8 \times (-1)} = \sqrt[15]{-8} = -\sqrt[15]{8} = -\sqrt[5]{2} \neq -2$

$\forall a, b \in \mathrm{IR},\ \sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[15]{a \times b}$ é uma proposição falsa.

(C) $\forall a, b \in \mathrm{IR},\ \sqrt[9]{a} \div \sqrt[3]{b} = \sqrt[9]{a} \div \sqrt[9]{b^3} = \sqrt[9]{\frac{a}{b^3}}$ é uma proposição verdadeira.

(D) $\sqrt{(-3)^2} = 3 \neq -3$

$\forall a \in \mathrm{IR}, \sqrt{a^2} = a$ é uma proposição falsa.

3. Opção (D)

$$2\sqrt{3}x - 1 = 3\sqrt{2}x + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{2}x = 4 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{12-18}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{-6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3}$$

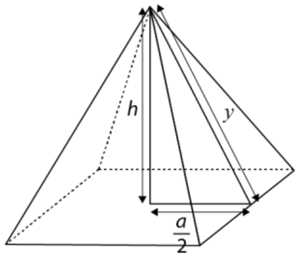
$\mathrm{C.S.} = \left\{\frac{-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3}\right\}$

4. $V_{\text{octaedro}} = 2 \times V_{\text{pirâmide}} = 2 \times \frac{1}{3} \times A_b \times h =$

$= \frac{2}{3} \times a^2 \times h =$

$= \frac{2}{3} a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} a =$

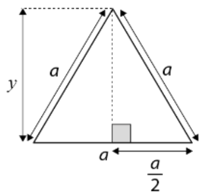
$= \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$



Cálculo auxiliar

$a^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = y^2 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = y^2$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} a^2$

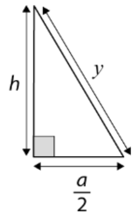


$y^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 = h^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} a^2 = h^2 \Leftrightarrow h = \pm \sqrt{\frac{a^2}{2}}$

$\Leftrightarrow h = \pm \frac{|a|}{\sqrt{2}} \underbrace{\Leftrightarrow}_{a>0} h = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow h = \pm \frac{\sqrt{2} a}{2}$

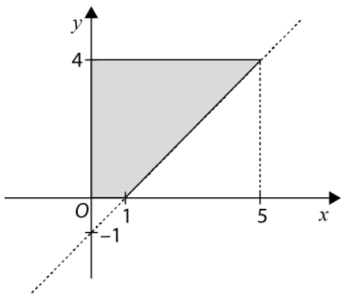


Como $h > 0$, então $h = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

5. $y - x + 1 \geq 0 \ \wedge \ \sim(x < 0) \ \wedge \ 0 \leq y \leq 4 \Leftrightarrow y \geq x - 1 \ \wedge \ x \geq 0 \wedge 0 \leq y \leq 4$

Cálculo auxiliar

x	$y = x - 1$	
1	0	(1, 0)
5	4	(5, 4)



$A_{\text{trapézio}} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{5+1}{2} \times 4 = 12 \text{ u. a.}$

6. $\begin{cases} (x+a)^2 + (y-a)^2 = 2a^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (y-a)^2 = 2a^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-a)^2 = a^2 \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y - a = a \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y - a = -a \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2a \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Como A tem ordenada positiva, $A(0, 2a)$. Seja $P(x, -x)$, com $x < 0$.

$$A_{[OAP]} = 4a \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times |\text{abcissa de } P|}{2} = 4a \Leftrightarrow \frac{2a \times (-x)}{2} = 4a$$

$$\Leftrightarrow -ax = 4a$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

Logo, $P(-4, 4)$.

7.

7.1. Seja M o ponto médio de $[AB]$. Então, $M\left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

$d(A, B) = \sqrt{(3-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

A equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$ é:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = 5$$

7.2. O triângulo $[ABC]$ é equilátero se e somente se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$.

$\overline{AB} = \sqrt{(3-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overline{BC} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

$\overline{AC} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$

$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$

$\Leftrightarrow 8y - 4y = 8x - 6x - 4 + 9$

$\Leftrightarrow 4y = 2x + 5$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

Logo, $C\left(x, \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)$.

$\overline{AC} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - 2\right)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - 2\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)^2 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} = 5$

$\Leftrightarrow 16x^2 - 128x + 256 + 4x^2 - 12x + 9 = 80$

$\Leftrightarrow 20x^2 - 140x + 185 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 28x + 37 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 4 \times 37}}{8}$

$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{192}}{8}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm 8\sqrt{3}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7+2\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7-2\sqrt{3}}{2}$$

8. Opção (B)

$$\sqrt[6]{4a^4} \times (2^2 a^{-2} b^{12})^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{2a^2} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times b^{-2} = 2^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times b^{-2} =$$

$$= 2^0 \times a \times b^{-2} =$$

$$= \frac{a}{b^2}$$

9. Opção (B)

$(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 3^2 \qquad C(-2, 1)$

$y = x + 3$

C pertence à reta definida por $y = x + 3$, pois $1 = -2 + 3$.

Logo, $(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 3^2 \wedge\ y - x - 3 = 0$ define um diâmetro do círculo.

Assim, $d = 2 \times r = 2 \times 3 = 6$.

10. $A(0, 3)$

$B(x, y)$, com $x^2 = 12y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{12}$, logo $y \geq 0$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} =$$

$$= \sqrt{12y + y^2 - 6y + 9} =$$

$$= \sqrt{y^2 + 6y + 9} =$$

$$= \sqrt{(y+3)^2} =$$

$$= |y + 3| =$$

$= y + 3$, pois $y + 3 > 0$.

11.

11.1. $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16\ + y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Logo, o centro da circunferência tem coordenadas$(-4, -3)$.

11.2. $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+8x+16+y^2+6y+9$

$\Leftrightarrow -6y=8x+25$

$\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x-\frac{25}{6}$

11.3.

- Interseção da circunferência com o eixo Ox:

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x+6y=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+8)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-8 \\ y=0 \end{cases}$$

Como A tem menor abcissa, então $A(-8,0)$.

- Interseção da circunferência com o eixo Oy:

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x+6y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+6y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+6)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-6 \\ x=0 \end{cases}$$

Como C tem menor ordenada, então $C(0,-6)$.

Reta $AB: y=mx+b$ $\quad A(-8,0) \quad B(-4,-6)$

$m=\frac{-6-0}{-4+8}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

$y=-\frac{3}{2}x+b$

Como o ponto $A(-8,0)$ pertence à reta, vem que:

$0=-\frac{3}{2}\times(-8)+b \Leftrightarrow 0=12+b \Leftrightarrow b=-12$

$AB: y=-\frac{3}{2}x-12$

Uma condição que define o trapézio $[OABC]$ é:

$$x\leq 0 \ \wedge\ -6\leq y\leq 0 \ \wedge\ y\geq -\frac{3}{2}x-12$$