

Teste N.º 3

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;

g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n - 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty (p \in \mathbb{R})$

1. Num clube desportivo praticam-se as modalidades de futebol e voleibol, entre outras.

Sabe-se que, escolhido ao acaso um atleta deste clube, a probabilidade de ele não praticar voleibol é o dobro da probabilidade de ele praticar futebol.

Sabe-se, ainda, que:

- dos atletas que praticam futebol, 1 em cada 3 pratica voleibol;
- o número de atletas que praticam, pelo menos, uma das duas modalidades é o sêxtuplo do número de atletas que praticam as duas modalidades.

1.1. Escolhe-se, ao acaso, um atleta deste clube.

Mostre que a probabilidade de o atleta escolhido praticar futebol é igual a 0,3.

1.2. O Sérgio, que é atleta desse clube, pratica futebol.

Escolhe-se, ao acaso, uma comissão constituída por dois atletas desse clube.

Sabe-se que a probabilidade de a comissão ser constituída por dois atletas praticantes de futebol e não incluir o Sérgio é $\frac{11}{156}$.

Seja n o número total de atletas desse clube.

Determine o valor de n .

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

1.3. Admita que a equipa de voleibol deste clube vai participar na final nacional.

A comitiva vai deslocar-se num automóvel de cinco lugares e numa carrinha de dez lugares.

A comitiva é constituída por um dirigente, dois treinadores e doze jogadores.

A expressão que dá o número de maneiras distintas de distribuir os quinze elementos da comitiva pelos quinze lugares disponíveis, de modo que os condutores sejam os dois treinadores e que o dirigente vá no automóvel, é:

(A) $2 \times {}^{12}C_3 \times 4! \times {}^9A_9$

(B) $2 \times {}^{12}A_3 \times {}^9A_9$

(C) ${}^{12}C_3 \times 4! \times {}^9A_9$

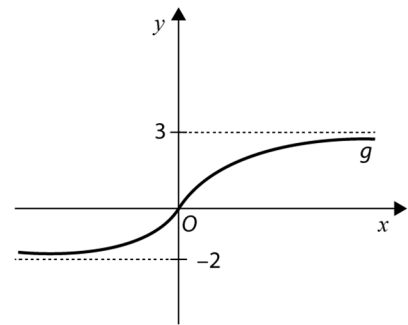
(D) ${}^{12}A_3 \times {}^9A_9$

2. Na figura encontra-se representada graficamente a função g , de domínio \mathbb{R} .

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \frac{-n+3}{\sqrt{n}}$.

A que é igual $\lim g(u_n)$?

- (A) -2 (B) 3 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$



3. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+2}-2x} & \text{se } x < 1 \\ -\frac{4}{5} & \text{se } x = 1 \\ \frac{3x^3-x^2-3x+1}{-2x^2-x+3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

3.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 1$.

3.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso exista(m), escreva a(s) sua(s) equação(ões).

4. Seja g uma função, de domínio \mathbb{R} , diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x^2-2x} = 5$
- $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$

Sejam A o ponto do gráfico de g de abcissa 2 e t a reta tangente ao gráfico de g no ponto A .

Qual é a equação reduzida da reta que passa em A e é perpendicular à reta t ?

- (A) $y = -\frac{1}{10}x + \frac{23}{10}$
 (B) $y = -\frac{1}{10}x + \frac{16}{5}$
 (C) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$
 (D) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

5. Numa certa linha n do triângulo de Pascal tem-se que ${}^nC_1 - {}^nC_{n-1} + {}^nC_{34} - {}^nC_{56} = 0$.
Qual é o produto do segundo elemento pelo antepenúltimo elemento dessa linha?
- (A) 1 904 (B) 8 100 (C) 117 480 (D) 360 450

6. Seja f a função, de domínio $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ 2\operatorname{sen}^2 x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

O argumento da função está expresso em radianos.

6.1. Em relação às assíntotas verticais do gráfico da função f , qual das afirmações é verdadeira?

- (A) O gráfico de f não tem assíntotas verticais.
(B) A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical.
(C) A reta de equação $x = -\frac{\pi}{2}$ é a única assíntota vertical.
(D) As retas de equação $x = 0$ e $x = -\frac{\pi}{2}$ são as únicas assíntotas verticais.

6.2. Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]0, \pi[$.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f , caso exista(m).

7. Considere um determinado número real a e a função f , de domínio \mathbb{R} , da qual se sabe que:

- f é contínua;
- $f(a) = f(a + 6) = 0$;
- $f(a + 3) < 0$.

Mostre que a equação $f(x) = f(x + 3)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]a, a + 3[$.

8. Em relação a uma certa função g , de domínio \mathbb{R}^+ , sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xg(x) + x^2 - 3x}{x} = 0$.

Seja a reta r a assíntota oblíqua ao gráfico de g .

Considere, num referencial o.n. Oxy , a representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 2\text{sen}(x) + \cos(x)$, a reta r e o triângulo $[OAB]$ tal que:

- o ponto A é o ponto de interseção do gráfico da função f com a reta r , de menor abscissa;
- o ponto B é o ponto de interseção do gráfico da função f com a reta r , de maior abscissa.

O argumento da função f está expresso em radianos.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, a área do triângulo $[OAB]$, com aproximação às centésimas.

Pode realizar algum trabalho analítico antes de recorrer à calculadora.

Na sua resposta, deve:

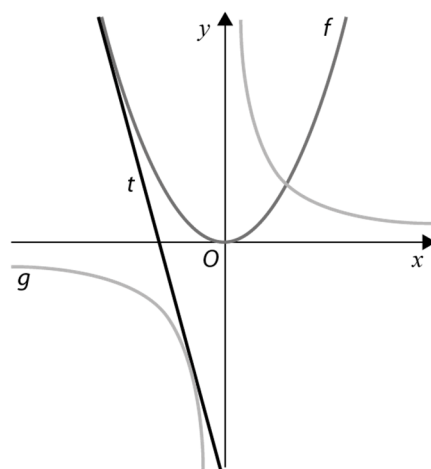
- reproduzir o gráfico ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B ;
- desenhar o triângulo $[OAB]$;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B , com arredondamento às centésimas.

9. Na figura estão representadas, em referencial o.n. Oxy , partes dos gráficos das funções f e g e a reta t , tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g .

Sabe-se que:

- a função f , de domínio \mathbb{R} , é definida por $f(x) = x^2$;
- a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, é definida por $g(x) = \frac{1}{x}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da reta t .



FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.1.	3.2.	4.	5.	6.1.	6.2.	7.	8.	9.	Total
18	18	10	10	20	20	10	10	10	18	18	20	18	200

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

V : “praticar voleibol”

F : “praticar futebol”

Sabemos que:

- $P(\bar{V}) = 2P(F)$
- $P(V|F) = \frac{1}{3}$
- $P(V \cup F) = 6P(V \cap F)$

Então:

- $P(\bar{V}) = 2P(F) \Leftrightarrow 1 - P(V) = 2P(F) \Leftrightarrow P(V) = 1 - 2P(F)$
- $P(V|F) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(V \cap F) = \frac{1}{3}P(F)$
- $P(V \cup F) = 6P(V \cap F) \Leftrightarrow P(V) + P(F) - P(V \cap F) = 6P(V \cap F)$
 $\Leftrightarrow \underbrace{P(V)}_{1-2P(F)} + P(F) - \underbrace{P(V \cap F)}_{\frac{1}{3}P(F)} = 0$
 $\Leftrightarrow 1 - 2P(F) + P(F) - \frac{7}{3}P(F) = 0$
 $\Leftrightarrow -\frac{10}{3}P(F) = -1$
 $\Leftrightarrow P(F) = \frac{3}{10}$
 $\Leftrightarrow P(F) = 0,3$

Logo, a probabilidade de o atleta escolhido praticar futebol é igual a 0,3.

1.2. Seja n o número total de atletas desse clube.

Seja m o número de atletas desse clube que praticam futebol.

O número de comissões constituídas por dois atletas desse clube é igual a nC_2 .

O número de comissões constituídas por dois atletas praticantes de futebol que não incluem o Sérgio é igual a ${}^{m-1}C_2$.

Como sabemos que a probabilidade de a comissão ser constituída por dois atletas praticantes de futebol e não incluir o Sérgio é igual a $\frac{11}{156}$, então:

$$\frac{{}^{m-1}C_2}{{}^nC_2} = \frac{11}{156} \Leftrightarrow \frac{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{11}{156}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)(m-2)}{n(n-1)} = \frac{11}{156}$$

Cálculos auxiliares

$${}^{m-1}C_2 = \frac{(m-1)!}{2!(m-3)!} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)!}{2(m-3)!} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

$${}^nC_2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$



$$\Leftrightarrow 156(m-1)(m-2) = 11n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow 156(m^2 - 3m + 2) = 11(n^2 - n)$$

Sabe-se que, escolhido ao acaso um atleta deste clube, a probabilidade de ele praticar futebol é igual a 0,3. Então, $0,3n$ representa o número de atletas desse clube que praticam futebol, isto é, $m = 0,3n$:

$$\Leftrightarrow 156(0,09n^2 - 0,9n + 2) = 11n^2 - 11n$$

$$\Leftrightarrow 14,04n^2 - 140,4n + 312 - 11n^2 + 11n = 0$$

$$\Leftrightarrow 3,04n^2 - 129,4n + 312 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{129,4 \pm \sqrt{(-129,4)^2 - 4 \times 3,04 \times 312}}{6,08}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{129,4 \pm 113,8}{6,08}$$

$$\Leftrightarrow n = 40 \vee n = \frac{15,6}{6,08}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 40$.

1.3. Opção (A)

A expressão que dá o número de maneiras distintas de distribuir os quinze elementos da comitiva pelos quinze lugares disponíveis, de modo que os condutores sejam os dois treinadores e que o dirigente vá no automóvel, é $2 \times {}^{12}C_3 \times 4! \times {}^9A_9$.

2 é o número de maneiras distintas de escolher, dos dois treinadores, quem vai a conduzir o automóvel e quem vai conduzir a carrinha.

Como o dirigente vai no automóvel, então teremos que escolher 3 jogadores, de entre os 12 disponíveis. Assim, ${}^{12}C_3$ é o número de modos distintos de escolher quais os 3 jogadores que, juntamente com o dirigente, ocuparão os 4 lugares (de não condutor) do automóvel e $4!$ é o número de modos de trocar os 4 lugares entre si.

Finalmente, restam 9 jogadores para serem distribuídos pelos 9 lugares (de não condutor) da carrinha, o que pode ser feito de 9A_9 maneiras distintas.

2. Opção (A)

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+3}{\sqrt{n}} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-n+3)\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-1+\frac{3}{n})\sqrt{n}}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(-1 + \frac{3}{n}\right) \sqrt{n} \right) = (-1 + 0) \times (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \lim g(u_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2.$$



3.

3.1. f é contínua em $x = 1$ sse existir $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+2}-2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2x)}{(\sqrt{x^2+x+2}-2x)(\sqrt{x^2+x+2}+2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2x)}{x^2+x+2-4x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2x)}{-3x^2+x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2x)}{(x-1)(-3x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2+x+2}+2x}{-3x-2} = \\ &= \frac{\sqrt{4+2}}{-3-2} = \\ &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar			
	-3	1	2
1		-3	-2
	-3	-2	0 = R

$-3x^2 + x + 2 = (x - 1)(-3x - 2)$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^3-x^2-3x+1}{-2x^2-x+3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(3x^2+2x-1)}{(x-1)(-2x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2+2x-1}{-2x-3} = \\ &= \frac{3+2-1}{-2-3} = \\ &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares			
	3	-1	-3
1		3	2
	3	2	-1
			0 = R

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(3x^2 + 2x - 1)$

	-2	-1	3
1		-2	-3
	-2	-3	0 = R

$-2x^2 - x + 3 = (x - 1)(-2x - 3)$

$\bullet f(1) = -\frac{4}{5}$

Logo, f é contínua em $x = 1$.

$$\begin{aligned} 3.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+2}-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2} = \frac{1}{-\sqrt{1}-2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -\frac{1}{3}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - x^2 - 3x + 1}{-2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(-2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{-2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{+\infty \times 3}{-2} = -\infty\end{aligned}$$

Como o valor obtido não é um número real, o gráfico de f não admite assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.

4. Opção (B)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x^2 - 2x} = 5 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x(x-2)} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = 5 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = 10\end{aligned}$$

Seja m_t o declive da reta t . Como $m_t = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}$, tem-se que $m_t = 10$. Uma reta perpendicular à reta t tem declive $-\frac{1}{m_t}$, ou seja, $-\frac{1}{10}$.

Assim, a equação reduzida da reta pretendida é da forma $y = -\frac{1}{10}x + b$.

Como a função é diferenciável em todos os pontos do seu domínio, então é contínua em todos os pontos do seu domínio, em particular em $x = 2$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$.

Como $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$, então A tem coordenadas $(2, 3)$.

Assim,

$$\begin{aligned}3 &= -\frac{1}{10} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow b = \frac{16}{5}\end{aligned}$$

A equação reduzida da reta que passa em A e é perpendicular à reta t é $y = -\frac{1}{10}x + \frac{16}{5}$.

5. Opção (D)

$$\begin{aligned}{}^nC_1 - {}^nC_{n-1} + {}^nC_{34} - {}^nC_{56} = 0 &\Leftrightarrow n - n + {}^nC_{34} - {}^nC_{56} = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^nC_{34} = {}^nC_{56}\end{aligned}$$

Logo, $n = 34 + 56 = 90$.

Assim, o produto do segundo elemento pelo antepenúltimo elemento da linha $n = 90$ é:

$${}^{90}C_1 \times {}^{90}C_{88} = 90 \times 4005 = 360\,450$$

6.

6.1. Opção (C)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\text{sen}^2 x + 1) = 2 \times 0 + 1 = 1$$

Como os limites laterais são ambos números reais, pode concluir-se que a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical do gráfico da função f .

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \text{tg } x \text{ sen } x = (-\infty) \times (-1) = +\infty$$

A reta de equação $x = -\frac{\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico da função f , e é única, pois a função f é contínua em $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

6.2. Em $]0, \pi[$, tem-se que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\text{sen}^2 x + 1)' = 2 \times 2\text{sen}x \times (\text{sen } x)' = \\ &= 2 \times 2\text{sen}x \times \text{cos}x = \\ &= 2\text{sen}(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2\text{sen}(2x))' = 2 \times 2 \text{cos}(2x) = \\ &= 4 \text{cos}(2x) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0$$

$$4 \text{cos}(2x) = 0 \Leftrightarrow \text{cos}(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $]0, \pi[$, os zeros de f'' são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
Sinal de f''		+	0	-	0	+	
Sentido das concavidades do gráfico de f		U	P.I.	∩	P.I.	U	

Cálculos auxiliares

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 > 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 4 \cos(\pi) = 4 \times (-1) = -4 < 0$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4 \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) = 4 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = 2$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = 2$$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Os pontos de inflexão são os pontos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{4}, 2\right)$.

7. Provar que a equação $f(x) = f(x + 3)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]a, a + 3[$ é equivalente a provar que $f(x) - f(x + 3) = 0$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]a, a + 3[$.

Consideremos a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = f(x) - f(x + 3)$.

• g é contínua em $]a, a + 3[$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.

• $g(a) = f(a) - f(a + 3) = 0 - f(a + 3) =$

$$= -\underbrace{f(a + 3)}_{< 0} > 0$$

$$\begin{aligned} g(a + 3) &= f(a + 3) - f((a + 3) + 3) = f(a + 3) - f(a + 6) = \\ &= f(a + 3) - 0 = \\ &= f(a + 3) < 0 \end{aligned}$$

Assim, $g(a + 3) < 0 < g(a)$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in]a, a + 3[: g(c) = 0$$

isto é:

$$\exists c \in]a, a + 3[: f(c) - f(c + 3) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]a, a + 3[: f(c) = f(c + 3)$$

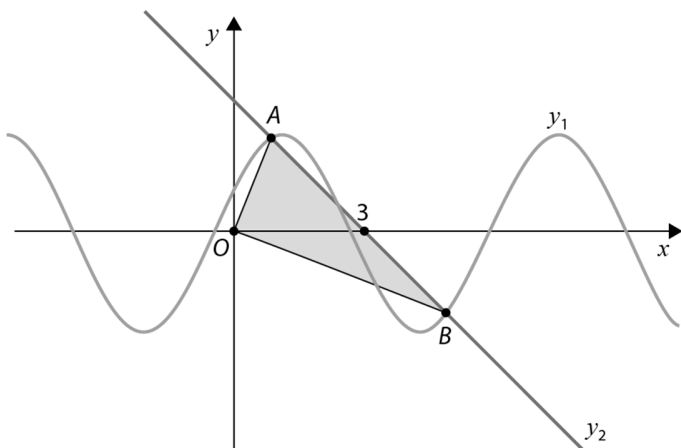
$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xg(x) + x^2 - 3x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x - 3) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (-x + 3)) = 0$$

Logo, a reta de equação $y = -x + 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$. Ou seja, a reta r é definida por $y = -x + 3$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:

$$y_1 = 2\text{sen}(x) + \cos(x)$$

$$y_2 = -x + 3$$



$$A(a_1, a_2)$$

$$B(b_1, b_2)$$

$$a_1 \approx 0,84 \text{ e } a_2 \approx 2,16$$

$$b_1 \approx 4,85 \text{ e } b_2 \approx -1,85$$

Cálculo auxiliar

$$-x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Seja C a interseção da reta r com o eixo Ox . Para determinar a área do triângulo $[OAB]$, vamos decompô-lo em dois triângulos de base $[OC]$. Tem-se que $\overline{OC} = 3$.

$$A_{[OAB]} = \frac{3 \times 2,16}{2} + \frac{3 \times |-1,85|}{2} \approx 6,02$$

9. Seja A o ponto de tangência da reta t com o gráfico de f e seja B o ponto de tangência da reta t com o gráfico de g .

$$A(a, a^2)$$

$$B\left(b, \frac{1}{b}\right), b \neq 0$$

$$f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Como a reta tangente ao gráfico de f em A e a reta tangente ao gráfico de g em B são a mesma reta, concluímos que $f'(a) = g'(b)$. Assim:

$$f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow 2a = -\frac{1}{b^2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2b^2}$$

$$\text{Então, } A\left(-\frac{1}{2b^2}, \frac{1}{4b^4}\right).$$

Vamos então determinar o declive da reta AB , em função de b , através das coordenadas dos pontos A e B :

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{4b^4}}{b + \frac{1}{2b^2}} = \frac{\frac{4b^3 - 1}{4b^4}}{\frac{2b^3 + 1}{2b^2}} = \frac{\frac{4b^3 - 1}{4b^4}}{\frac{2b^3 + 1}{2b^2}} = \\ &= \frac{2b^2(4b^3 - 1)}{4b^4(2b^3 + 1)} = \\ &= \frac{4b^3 - 1}{2b^2(2b^3 + 1)} \end{aligned}$$

Por outro lado, como a reta AB é a reta tangente ao gráfico de g , no ponto B , então o seu declive é igual a $g'(b)$, ou seja, $m_{AB} = -\frac{1}{b^2}$.

Então:

$$\begin{aligned} \frac{4b^3 - 1}{2b^2(2b^3 + 1)} &= -\frac{1}{b^2} \Leftrightarrow \frac{4b^3 - 1}{2(2b^3 + 1)} = -1 \\ &\Leftrightarrow 4b^3 - 1 = -2(2b^3 + 1) \\ &\Leftrightarrow 4b^3 - 1 = -4b^3 - 2 \\ &\Leftrightarrow 8b^3 = -1 \\ &\Leftrightarrow b^3 = -\frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{b^2} = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -4$$

$$t: y = -4x + d$$

Como o ponto $B\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ pertence à reta, então:

$$-2 = -4\left(-\frac{1}{2}\right) + d \Leftrightarrow -2 = 2 + d \Leftrightarrow -4 = d$$

A equação reduzida da reta t é $y = -4x - 4$.