Teste de Matemática A

2019 / 2020

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item. As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = (n-2020)^2 \quad \text{e} \quad v_n = \begin{cases} n & \text{se} \quad n < 2020 \\ \cos(n\pi) & \text{se} \quad n \geq 2020 \end{cases}$$

Em relação a estas sucessões, podemos concluir que:

(A) são ambas monótonas.

(B) são ambas limitadas.

(C) (u_n) é monótona e não limitada.

(D) (v_n) é não monótona e limitada.

2. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = 3\cos(2x)$ e $g(x) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + a\cos(x)$, onde a é um número real superior a 1.

2.1. A função f é uma função periódica de período:

(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{2}$ **(C)** $\frac{2\pi}{3}$ **(D)** π

2.2. Qual é o contradomínio da função g, para qualquer valor de a?

(A) $[a-1,\ a+1]$ **(B)** $[1-a,\ a-1]$ **(C)** $[-a, a]$ **(D)** $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$

2.3. Considerando $a = 4$ e recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

2.4. Considere, num referencial o.n. Oxy, o gráfico da função f representado no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e um triângulo $[OAP]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e P são pontos do gráfico de f;
- o ponto A tem abcissa positiva e esta é o zero da função f no intervalo considerado;
- P é um ponto do gráfico da função f e pertence ao segundo quadrante.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, as coordenadas do ponto P, de modo que a área do triângulo $[OAP]$ seja igual a $\frac{1}{2}$.

Na sua resposta deve:

- determinar analiticamente as coordenadas do ponto A;
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas do ponto P, com arredondamento às centésimas.

3. Num referencial o.n. Oxy do plano, considere:

- a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$;
- a reta t tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(3, 4)$.

Seja α a inclinação da reta t.

Determine, sem recurso à calculadora, o valor de $\cos \alpha$.

4. O limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5^n}$ é:

(A) $\frac{5}{4}$ **(B)** $\frac{4}{5}$ **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a superfície esférica de equação $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$;
- o ponto A de coordenadas $A(1, 2, 3)$ pertencente a essa superfície esférica.

Recorrendo a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

5.1. Seja B o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas.

5.1.1. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

Se P pertencer ao plano mediador de $[AB]$, então necessariamente:

(A) $\overrightarrow{PA} . \overrightarrow{PM} = 0$ **(B)** $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{PM} = 0$

(C) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{PB} = 0$ **(D)** $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{AP} = 0$

5.1.2. Determine a amplitude do ângulo AOB.

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

5.1.3. Determine uma equação cartesiana do plano OAB.

5.2. Seja α o plano definido por:

$$2x - 3y + 11 = 0$$

Sabe-se que o plano α é tangente à superfície esférica.

Determine as coordenadas do ponto de tangência.

6. Determine o primeiro termo de uma progressão aritmética, da qual se sabe que a soma dos quatro primeiros termos é igual a 46 e que a diferença entre o oitavo termo e o quinto termo é igual a 9.

7. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = \frac{4n^3+n^2-1}{-2n^3+n} \quad \text{e} \quad b_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

Seja $A = \lim a_n$ e $B = \lim b_n$.

Determine o valor de $A + B$.

- FIM -

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.**	**5.1.1.**	**5.1.2.**	**5.1.3.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	
8	8	8	20	20	20	8	8	20	20	20	20	20	**200**

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

- Em relação à sucessão (u_n), sabemos que é não monótona:

  $u_{2019} = (2019 - 2020)^2 = (-1)^2 = 1$

  $u_{2020} = (2020 - 2020)^2 = 0$

  $u_{2021} = (2021 - 2020)^2 = 1$

  $u_{2019} > u_{2020}$ e $u_{2020} < u_{2021}$

  A sucessão (u_n) é não limitada, pois não existe nenhum número real b tal que $u_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$ (observe-se que (u_n) é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função real de variável real f definida por $f(x) = (x - 2020)^2$).

- Em relação à sucessão (v_n), sabemos que também é não monótona:

  $u_{2020} = \cos(2020\pi) = 1$

  $u_{2021} = \cos(2021\pi) = -1$

  $u_{2022} = \cos(2022\pi) = 1$

  $u_{2020} > u_{2021}$ e $u_{2021} < u_{2022}$

  A sucessão (v_n) é limitada, pois existem dois números reais a e b tais que $a \leq v_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$.
  Por exemplo, $a = -1$ e $b = 2019$, já que os primeiros 2019 termos da sucessão são os primeiros 2019 números naturais e, a partir do termo de ordem 2020, a sucessão varia apenas entre -1 e 1.

2.

2.1. Opção (D)

Para que o número real P seja período de f, terá que se verificar $f(x + P) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

- Se $P = \frac{\pi}{3}$:

  $$f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \neq f(x)$$

- Se $P = \frac{\pi}{2}$:

  $$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\cos(2x + \pi) = -3\cos(2x) \neq f(x)$$

- Se $P = \frac{2\pi}{3}$:

  $$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\left(2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 3\cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) \neq f(x)$$

- Se $P = \pi$:

  $f(x + \pi) = 3\cos(2(x + \pi)) = 3\cos(2x + 2\pi) = 3\cos(2x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, logo f é periódica de período π.

2.2. Opção (B)

$$g(x) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + a\cos x = -\cos x + a\cos x =$$

$$= (a-1)\cos x, \quad \text{com } a > 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-(a-1) \leq (a-1)\cos x \leq a-1, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a > 1$$

$$-a+1 \leq g(x) \leq a-1$$

$$D'_g = [1-a, a-1]$$

2.3. Pretende-se os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x)$:

$$3\cos(2x) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + 4\cos(x) \Leftrightarrow 3\cos(2x) = -\cos x + 4\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow 3\cos(2x) = 3\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \quad \vee \quad 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

2.4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$

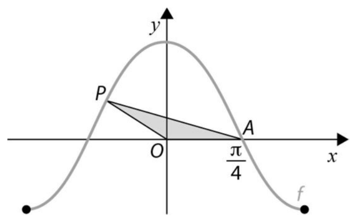
$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x = \frac{\pi}{4}$, já que $x > 0$.

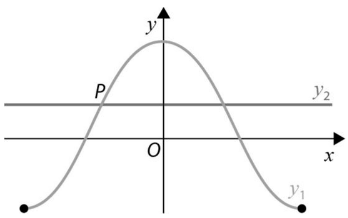
Assim, as coordenadas do ponto A são $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Pretende-se as coordenadas de um ponto P do gráfico de f que pertença ao 2.º quadrante e tal que $\frac{\frac{\pi}{4} \times f(x)}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{\pi}$.



$P(x, f(x))$

$A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$



$$y_1 = 3\cos(2x)$$

$$y_2 = \frac{4}{\pi}$$

As coordenadas do ponto P são $(-0{,}57; 1{,}27)$.

3.

3.1. Seja m_t o declive da reta t e α a sua inclinação. Como t é tangente à circunferência de centro (0,0) no ponto T de coordenadas (3,4), então $m_t = -\frac{1}{m_{OT}} = -\frac{3}{4}$.

Como $m_t = \operatorname{tg}\alpha$, então $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

Como $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, tem-se que:

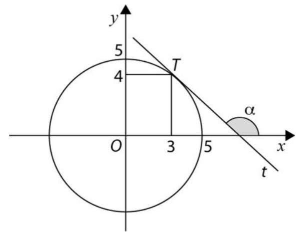
$$1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como α é a inclinação da reta e $\operatorname{tg}\alpha < 0$, então $90° < \alpha < 180°$ e, como tal, $\cos\alpha < 0$, isto é, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Cálculo auxiliar



$$m_{OT} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

4. Opção (A)

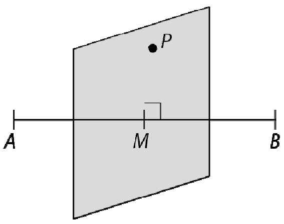
$$\lim u_n = \lim \underbrace{\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5^n}\right)}_{\substack{\text{Soma de } n \text{ termos de uma progressão} \\ \text{geométrica de razão } \frac{1}{5} \text{ e 1.º termo 1.}}} = \lim\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} \times 1\right) = \frac{1-0}{\frac{4}{5}} \times 1 = \frac{5}{4}$$

5.

5.1.

5.1.1. Opção (B)

Se P pertencer ao plano mediador de $[AB]$, então sabemos que $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = 0$, pois o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é um plano perpendicular a $[AB]$ e que passa pelo médio de $[AB]$.



5.1.2. O ponto B pertence ao semieixo negativo das ordenadas, logo as coordenadas de B são da forma $(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}^-$.

Como também pertence à superfície esférica de equação $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$, tem-se que:

$(0-1)^2 + y^2 + 0^2 = 13 \Leftrightarrow y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{12}$

Logo, $B\left(0, -\sqrt{12}, 0\right)$.

$\overrightarrow{OA} = A - O = (1, 2, 3)$ e $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{OB} = B - O = (0, -\sqrt{12}, 0)$ e $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{12})^2 + 0^2} = \sqrt{12}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(A\hat{O}B)$

$(1, 2, 3).(0, -\sqrt{12}, 0) = \sqrt{14} \times \sqrt{12} \times \cos(A\hat{O}B) \Leftrightarrow 0 - 2\sqrt{12} + 0 = \sqrt{14} \times \sqrt{12} \times \cos(A\hat{O}B)$

$\Leftrightarrow \cos(A\hat{O}B) = \frac{-2\sqrt{12}}{\sqrt{14}\times\sqrt{12}}$

Assim, $A\hat{O}B \approx 122{,}3°$.

5.1.3. $A(1, 2, 3)$ $B(0, -\sqrt{12}, 0)$ $O(0, 0, 0)$

Seja $\vec{n}$ um vetor normal ao plano OAB.

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{OA} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c).(1,2,3) = 0 \\ (a, b, c).(0, -\sqrt{12}, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -\sqrt{12}b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3c \\ b = 0 \end{cases}$$

Seja $c = 1$, por exemplo. Então, $\vec{n}(-3,0,1)$.

O plano OAB é, então, da forma $-3x + 0y + z + d = 0, d \in \mathbb{R}$.

Como $O(0, 0, 0)$ pertence ao plano, tem-se que:

$$0 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

Assim, uma equação cartesiana do plano OAB é $-3x + z = 0$.

5.2. Seja I o ponto de tangência. Assim, I é o ponto de interseção entre o plano α e a reta perpendicular a α e que passa pelo centro $C(1, 0, 0)$ da superfície esférica.

Equação vetorial da reta CI: $(x, y, z) = (1, 0, 0) + k(2, -3, 0), k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico: $(1 + 2k, -3k, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

Para que o ponto pertença ao plano α, terá que se verificar:

$2(1 + 2k) - 3(-3k) + 11 = 0 \Leftrightarrow 2 + 4k + 9k + 11 = 0$

$\Leftrightarrow 13k = -13$

$\Leftrightarrow k = -1$

Assim, o ponto I tem coordenadas $(1 + 2 \times (-1), -3 \times (-1), 0) = (-1, 3, 0)$.

6. Seja (a_n) a progressão aritmética, da qual se pretende determinar a_1.

Seja S_4 a soma dos quatro primeiros termos:

$S_4 = \dfrac{a_1 + a_4}{2} \times 4 \Leftrightarrow 46 = (a_1 + a_4) \times 2 \Leftrightarrow a_1 + a_4 = 23$

$\Leftrightarrow a_1 + (a_1 + 3r) = 23$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 3r = 23$

Como $a_8 - a_5 = 9$, vem que:

$(a_5 + 3r) - a_5 = 9 \Leftrightarrow 3r = 9 \Leftrightarrow r = 3$

Assim:

$2a_1 + 3r = 23 \Leftrightarrow 2a_1 + 3 \times 3 = 23 \Leftrightarrow 2a_1 = 14$

$\Leftrightarrow a_1 = 7$

7. $A = \lim a_n \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{4n^3+n^2-1}{-2n^3+n} = \lim \frac{4n^3\left(1+\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n^3}\right)}{-2n^3\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)} =$

$= \lim \frac{4\left(1+\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n^3}\right)}{-2\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)} =$

$= \lim \frac{4\times(1+0-0)}{-2\times(1-0)} =$

$= -2$

$B = \lim b_n = \lim \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \lim \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \frac{1}{+\infty+\infty} =$

$= \frac{1}{+\infty} =$

$= 0$

Assim, $A + B = -2 + 0 = -2$.